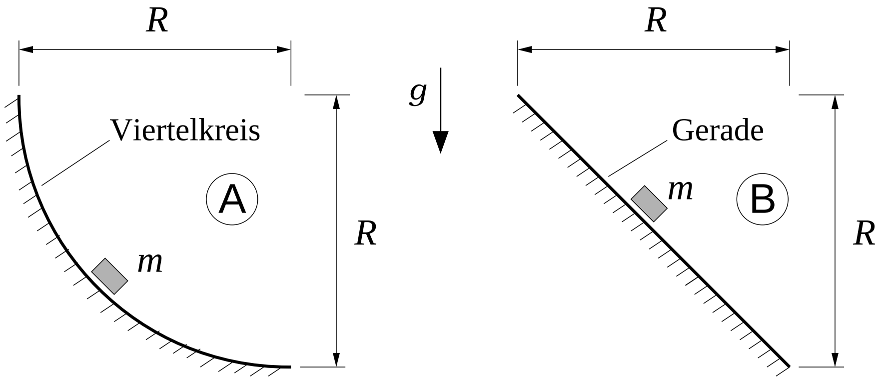
1. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



Zwei gleich schwere Massepunkte (m) gleiten aus der Ruhe heraus reibungsfrei zwei Bahnen unterschiedlicher Geometrie hinab. Berechnen Sie

a) die Geschwindigkeiten v_A und v_B der beiden Massepunkte am Ende der Bahnen sowie

b) die Zeiten t_A und t_B, welche die beiden Massepunkte für diese Bewegung benötigen.

c) Welcher Massepunkt kommt zuerst unten an?

Gegeben: m, $R = 10\,\text{m}$, $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

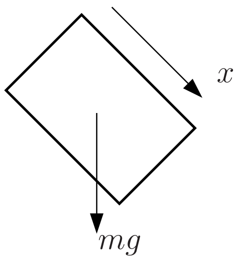
Hinweis: $$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}} \approx 2.62$$

1. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned} V_0 &= mgR, \qquad & T_1 &= 0 \\ V_1 &= 0, \qquad & T_1 &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \; v_A = v_B = \sqrt{2gR} = \underline{\underline{14,14}}\,\frac{m}{s}$$

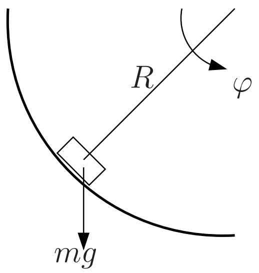
b) Gerade:



$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\cos(45°) \\ \ddot{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,g \\ \dot{x} &= \frac{g}{\sqrt{2}}\,t + \overbrace{\dot{x}_0}^{=0} = \frac{g}{\sqrt{2}}\,t \\ x &= \frac{g}{2\sqrt{2}}\,t^2 + \overbrace{x_0}^{=0} = \frac{g}{2\sqrt{2}}\,t^2 \end{aligned}$$

$$t_B = \sqrt{2\sqrt{2}\frac{1}{g}\sqrt{2}R} = \sqrt{4\frac{R}{g}} = \underline{\underline{2,0\,s}}$$

Kreis:



$$\begin{aligned} mR\ddot{\varphi} &= mg\cos\varphi \\ \underbrace{\ddot{\varphi}}_{\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}} &= \frac{g}{R}\cos\varphi \end{aligned}$$

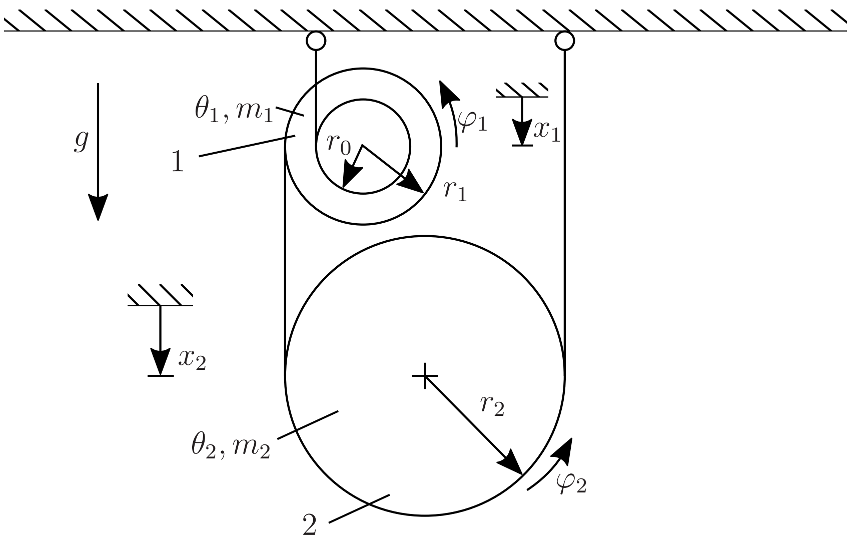
$$\int_0^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{g}{R}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R}\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{R}\sin\varphi}$$

$$t_A = \int_0^t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\frac{g}{R}}}\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\frac{g}{R}}}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\,d\varphi}_{=2{,}62206} = \underline{\underline{1,894\,s}}$$

c) A (Kreisbahn) kommt zuerst an, da $t_A < t_B$.

2. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Das skizzierte System besteht aus einer Stufenrolle 1 (Masse m_1, Massenträgheitsmoment θ_1, Schwerpunktskoordinate x_1) und einer Rolle 2 (Masse m_2, Massenträgheitsmoment θ_2, Schwerpunktskoordinate x_2), die über ein masseloses Seil verbunden sind.

a) Stellen Sie die kinematischen Zwangsbedingungen zwischen $\dot{x}_1,\ \dot{x}_2,\ \dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$ auf und geben Sie die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems an.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in der Koordinate x_2 auf.

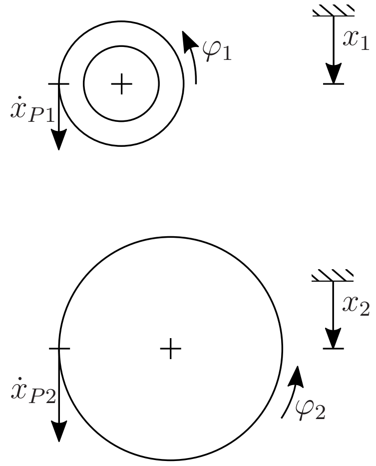
c) Für welches Verhältnis der beiden Massen $\frac{m_2}{m_1}$ bewegt sich die Rolle 2 nach unten?

Gegeben: $r_0 = r,\ r_1 = 2r,\ r_2 = 3r,\ m_1,\ \theta_1,\ m_2,\ \theta_2$

2. Aufgabe

a) kinematische Zwangsbedingungen, Anzahl der Freiheitsgrade:

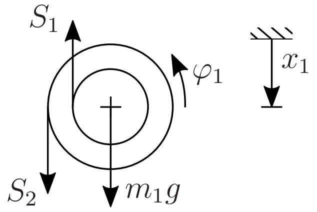
$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\dot{\varphi}_1 r_0 && \rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{x}_1 = -\dot{\varphi}_1 r}} \\
\dot{x}_2 &= \dot{\varphi}_2 r_2 && \rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{x}_2 = 3\dot{\varphi}_2 r}} \\
\dot{x}_{P1} &= \dot{x}_1 + \dot{\varphi}_1 r_1 = -\dot{x}_1 && \\
\dot{x}_{P2} &= \dot{x}_2 + \dot{\varphi}_2 r_2 = 2\dot{x}_2 && \\
\dot{x}_{P1} &= \dot{x}_{P2} && \rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{x}_1 = -2\dot{x}_2}}
\end{aligned}
$$



3 Zwangsbedingungen bei zunächst 4 Koordinaten (x_1, x_2, φ_1, φ_2) $\rightarrow$ 1 FHG

b) Bewegungsgleichung in Koordinate x_2:

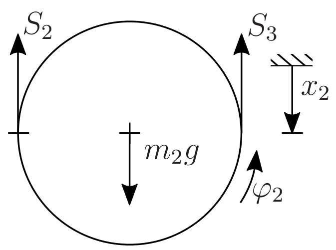
I) Stufenrolle 1:



Gleichgewicht:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= \sum F_{ix} \\
m_1\ddot{x}_1 &= S_2 + m_1 g - S_1 && (1) \\
\theta_1\ddot{\varphi}_1 &= \sum M_{zi}^{S_1} \\
\theta_1\ddot{\varphi}_1 &= S_2 r_1 - S_1 r_0 && (2)
\end{aligned}
$$

II) Rolle 2:



Gleichgewicht:

$$
\begin{aligned}
m_2\ddot{x}_2 &= \sum F_{ix} \\
m_2\ddot{x}_2 &= -(S_2 + S_3) + m_2 g && (3) \\
\theta_2\ddot{\varphi}_2 &= \sum M_{zi}^{S_2} \\
\theta_2\ddot{\varphi}_2 &= (S_3 - S_2) r_2 && (4)
\end{aligned}
$$

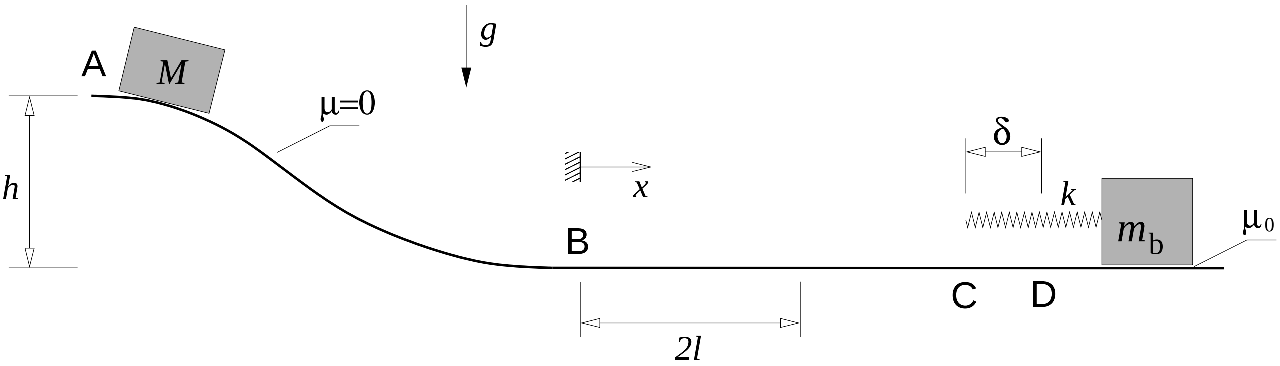
Elimination von S_1, S_2, S_3, x_1, φ_1, φ_2:

$$\rightarrow \ddot{x}_2 = \underline{\underline{\frac{g(m_2 - 2m_1)}{m_2 + 4m_1 + \frac{\theta_2}{9r^2} + \frac{4\theta_1}{r^2}}}}$$

c)

$$\ddot{x}_2 > 0 \quad \rightarrow \quad m_2 - 2m_1 > 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{m_2}{m_1} > 2}}$$

3. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Zum Rangieren von Eisenbahnwagen wird ein Ablaufberg eingesetzt. Ein Wagen der Masse M hat im Punkt A die Anfangsgeschwindigkeit v_A. Er fährt den Berg der Höhe h hinunter und wird dann auf einer Strecke der Länge $2l$ (gemessen ab Punkt B) mit einer Kraft

$$\vec{F}(x) = -\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\frac{3\ Mg}{64\ h^2}\ x^2\ \vec{e}_x, \quad 0 \leq x \leq 2l$$

abgebremst. Im Punkt C fährt der Wagen auf die abgebildete Bremsvorrichtung. Diese besteht aus einer Feder und einem Bremsklotz, der mit μ_0 am Untergrund haftet.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Anfangsgeschwindigkeit v_A, sodass der Wagen im Punkt C die Geschwindigkeit $v_C = \sqrt{gh}$ hat.

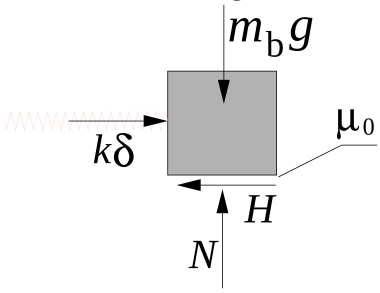
b) Gehen Sie davon aus, dass der Wagen im Punkt C die Geschwindigkeit $v_C = \sqrt{gh}$ hat. Welche Länge δ muss der Federweg mindestens haben, damit der Bremsklotz der Masse m_b nicht gleitet? Wie groß ist für diesen Fall die Federsteifigkeit k? Stellen Sie zuerst das Gleichgewicht für den Bremsklotz auf und setzen Sie darin die Bedingung ein, dass die kinetische Energie vollständig in die Verformung der Feder übergeht.

Gegeben: h, $l = 2h$, M, $m_b = 2M$, g, μ_0

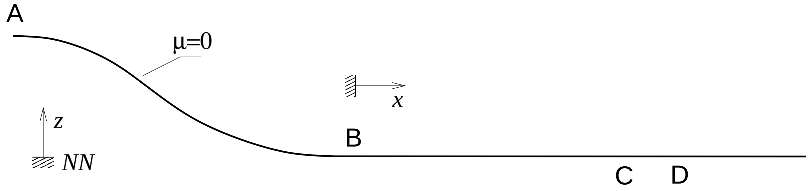
Hinweis:
Der als Massenpunkt anzusehende Wagen bewegt sich außerhalb der Strecke $0 \leq x \leq 2l$ ohne Reibung. Der Term $-\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ kennzeichnet lediglich, dass die Kraft F immer entgegen der Bewegungsrichtung wirkt.

3. Aufgabe

Freischnitt der Bremsvorrichtung:



Wahl des Nullniveaus:



a) Gesucht: Anfangsgeschwindigkeit v_A, sodass $v_c = \sqrt{gh}$:

Energiebilanz zwischen A und C:

$$T_A + V_A + W|_A^C = T_C + V_C$$

Energie im Punkt A:

$$T_A = \frac{1}{2} M v_A^2$$
$$V_A = Mgh$$

Arbeit der Nichtpotentialkraft:

$$\begin{aligned} W|_A^C &= W|_A^B + W|_B^C \\ &= 0 + \int_0^{2l} -\frac{3}{64}\frac{Mg}{h^2} x^2 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \vec{e}_x \mathrm{d}\vec{x} \qquad \mid \mathrm{d}\vec{x} = \vec{e}_x \mathrm{d}x, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 \\ &= \Big[-\frac{3}{64}\frac{Mg}{h^2}\frac{x^3}{3} \Big]_0^{4h} \\ &= -Mgh \end{aligned}$$

Energie in Punkt C:

$$T_C = \frac{1}{2} M v_C^2 = \frac{1}{2} Mgh$$
$$V_C = 0$$

Anfangsgeschwindigkeit v_A:

$$v_A = \sqrt{\frac{2}{M}\Big(T_C + V_C - V_A - W|_0^{2l}\Big)} = \sqrt{\frac{2}{M}\Big(\frac{1}{2} + 0 - 1 + 1\Big) Mgh} = \underline{\underline{\sqrt{gh}}}$$

b) Horizontales Gleichgewicht am Bremsklotz für Haften:

$$k\delta \leq H = \mu_0 N = \mu_0 m_b g = \mu_0 2Mg$$

Energiebilanz unter Annahme, dass kin. Energie komplett in Federenergie über geht:

$$
\begin{aligned}
T_C &\stackrel{!}{=} V_{\text{Feder}} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}Mgh &= \frac{1}{2}k\delta^2 \\
\Leftrightarrow \delta &= \sqrt{\frac{Mgh}{k}}
\end{aligned}
$$

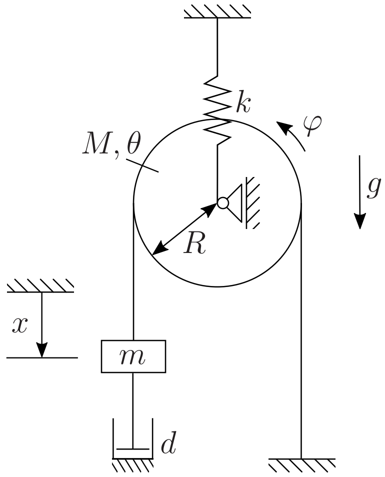
Einsetzen liefert Federsteifigkeit:

$$k = \underline{\underline{4\frac{Mg\mu_0^2}{h}}}$$

und Federweg:

$$\delta \geq \underline{\underline{\frac{v_c^2}{2g\mu_0} = \frac{h}{2\mu_0}}}$$

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Eine reibungsfrei gelagerte Rolle (Masse M, Massenträgheitsmoment θ) sei wie skizziert an einer Feder (Federsteifigkeit k) befestigt, sodass in vertikaler Richtung Schwingungen möglich sind. Ferner sei die Rolle über ein masseloses Seil mit einer zweiten Masse m und einem viskosen Dämpfer d verbunden.

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems in der Koordinate x mit der Methode nach Lagrange.

b) Ermitteln Sie die statische Ruhelage x_{stat} des Systems.

c) Für die allgemeine Bewegung des Systems in Form einer gedämpften Schwingung bestimme man die Eigenkreisfrequenz ω und das Lehr'sche Dämpfungsmaß D.

Gegeben: $M,\ R,\ m = \frac{M}{2},\ \theta = MR^2,\ d,\ k,\ g$

<u>Hinweis:</u> Andere Lösungswege als die Methode nach Lagrange werden nicht bewertet.

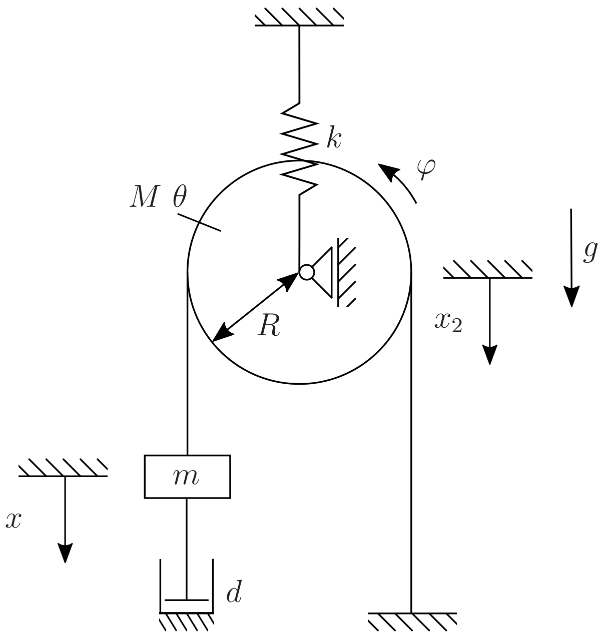
4. Aufgabe

a) Bewegungsgleichung nach Lagrange:

→ 1 FHG: x

→ Geschwindigkeiten der Schwerpunkte:

→ Wichtig: Bewegt sich die Masse m um x, wird die Seillänge x abgerollt und der Schwerpunkt der Rolle bewegt sich um $\frac{x}{2}$!



Kinematik:

$$x_2 = \frac{x}{2}$$
$$\varphi = \frac{x_2}{R} = \frac{x}{2R}$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{Trans}} + T_{\text{Rot}} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\theta\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Lage}} + V_{\text{Feder}} \\ &= mg(-x) + Mg\left(h_0 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Generalisierte Kräfte (Nicht-Potentialkräfte):

$$Q^* = -d\dot{x}$$

Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q^*$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + M\frac{\dot{x}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta\cdot 2\frac{\dot{x}}{2R}\cdot\frac{1}{2R} = m\dot{x} + M\frac{\dot{x}}{4} + \theta\frac{\dot{x}}{4R^2}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} + M\frac{\ddot{x}}{4} + \theta\frac{\ddot{x}}{4R^2}\\
\frac{\partial T}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial V}{\partial x} &= -mg - \frac{1}{2}Mg + \frac{1}{2}k\cdot 2\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} = -\left(m + \frac{M}{2}\right)g + \frac{kx}{4}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \left(m + \frac{M}{4} + \frac{\theta}{4R^2}\right)\ddot{x} - \left(m + \frac{M}{2}\right)g + \frac{kx}{4} = -d\dot{x}$$

Bewegungsgleichung:

$$m = \frac{M}{2}, \quad \theta = MR^2 \quad \rightarrow \quad M\ddot{x} + d\dot{x} + \frac{k}{4}x = Mg \rightarrow \underline{\underline{\ddot{x} + \frac{d}{M}\dot{x} + \frac{k}{4M}x = g}}$$

b)

$$x_{\text{stat}}:\ \dot{x}_{\text{stat}} = \ddot{x}_{\text{stat}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{k}{4M}x_{\text{stat}} = g \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x_{\text{stat}} = 4\frac{Mg}{k}}}$$

c)

$$D = \frac{d}{2M\omega_0} = \frac{d}{2M}\cdot 2\sqrt{\frac{M}{k}} = \underline{\underline{\frac{d}{\sqrt{kM}}}}$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - D^2} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{k}{4M}}\sqrt{1 - \frac{d^2}{kM}}}}$$