Modulprüfung

Statik starrer Körper

14. März 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

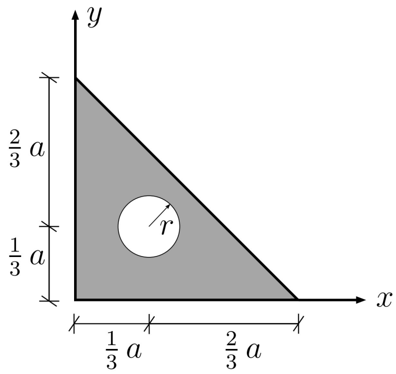
Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korrektur						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 13 % der Gesamtpunkte)

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt sowie die Koordinaten des Schwerpunkts der abgebildeten Scheibe.

Gegeben: a, r

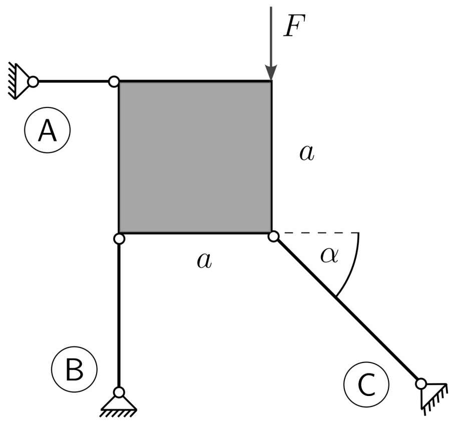


b) Prüfen Sie (mit Begründung, z.B. über Polplan), ob das abgebildete System statisch bestimmt ist für

i) $\alpha = 45°$ (wie abgebildet) und

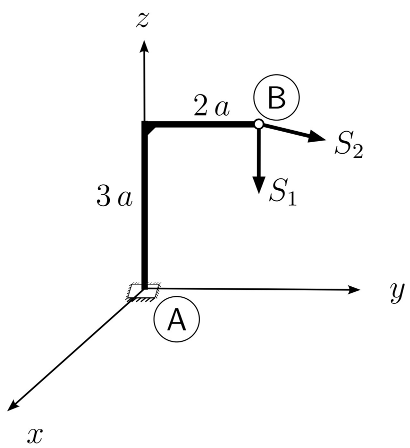
ii) $\alpha = 0°$.

Gegeben: a, α, F



c) Bestimmen Sie die Dyname der Seilkräfte S_1 und S_2 bezüglich des Punktes A. Die Richtungsvektoren zu S_1 und S_2 seien $\boldsymbol{e}_{S1}$ und $\boldsymbol{e}_{S2}$.

Gegeben: $S_1 = S_2 = F$, $\boldsymbol{e}_{S1}$, $\boldsymbol{e}_{S2}$, a



Musterlösung - Aufgabe 1

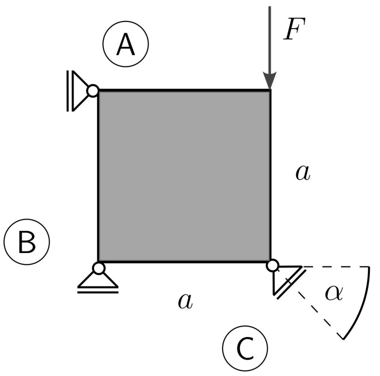
a)

$$A = A^{\text{Dreieck}} - A^{\text{Kreis}} = \frac{1}{2}a^2 - \pi r^2$$

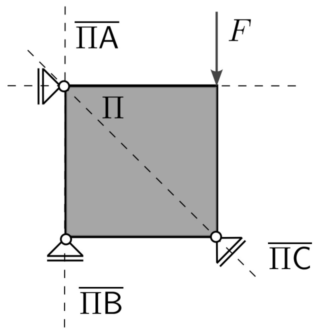
Schwerpunktskoordinaten von Dreieck und Kreis fallen zusammen, d.h. $x_{\text{S}} = \frac{1}{3}a$ und $y_{\text{S}} = \frac{1}{3}a$. Alternativ:

$$x_{\text{S}} = \frac{x_{\text{S}}^{\text{Dreieck}} A^{\text{Dreieck}} - x_{\text{S}}^{\text{Kreis}} A^{\text{Kreis}}}{A} = \frac{\frac{1}{3}a(\frac{1}{2}a^2 - \pi r^2)}{\frac{1}{2}a^2 - \pi r^2} = \frac{1}{3}a$$
$$y_{\text{S}} = \frac{y_{\text{S}}^{\text{Dreieck}} A^{\text{Dreieck}} - y_{\text{S}}^{\text{Kreis}} A^{\text{Kreis}}}{A} = \frac{\frac{1}{3}a(\frac{1}{2}a^2 - \pi r^2)}{\frac{1}{2}a^2 - \pi r^2} = \frac{1}{3}a$$

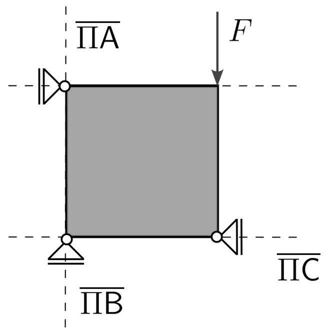
b) Pendelstützen abbauen



- notwendige Bedingung erfüllt i) & ii): $3 - r = 3 - 3 = 0$
- hinreichende Bedingung - anschaulich mit Polplan



i) kein Widerspruch im Polplan
→ beweglich
→ statisch unbestimmt



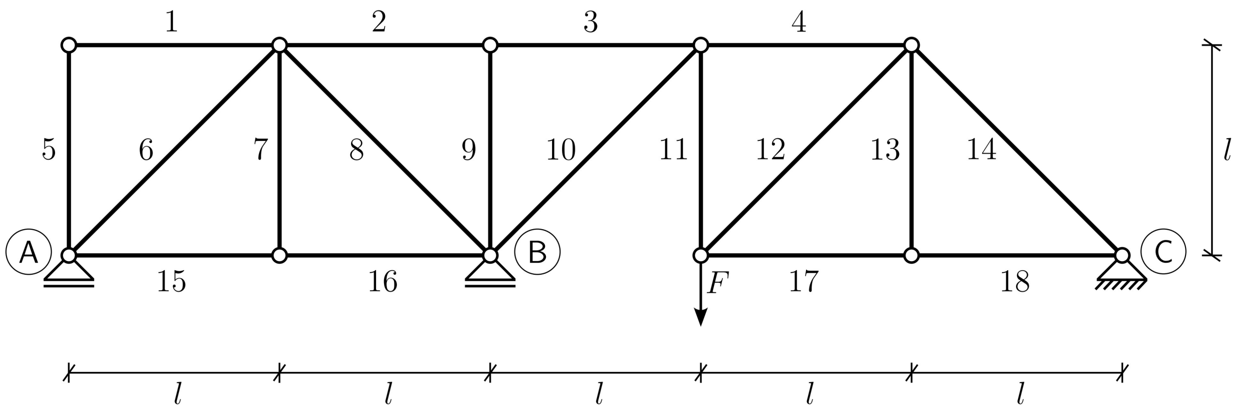
ii) Widerspruch im Hauptpol
→ unbeweglich
→ statisch bestimmt

c)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 = F\,(\boldsymbol{e}_{S1} + \boldsymbol{e}_{S2}), \quad \boldsymbol{r}_{\mathsf{AB}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ 3a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{\text{R}}^{(\mathsf{A})} = \boldsymbol{r}_{\mathsf{AB}} \times \boldsymbol{R}$$

⇒ Dyname bzgl. A: $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{M}_{\text{R}}^{(\mathsf{A})})$

2. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte, statisch bestimmte Tragwerk besteht aus 18 Stäben. Es wird durch die Kraft F belastet. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

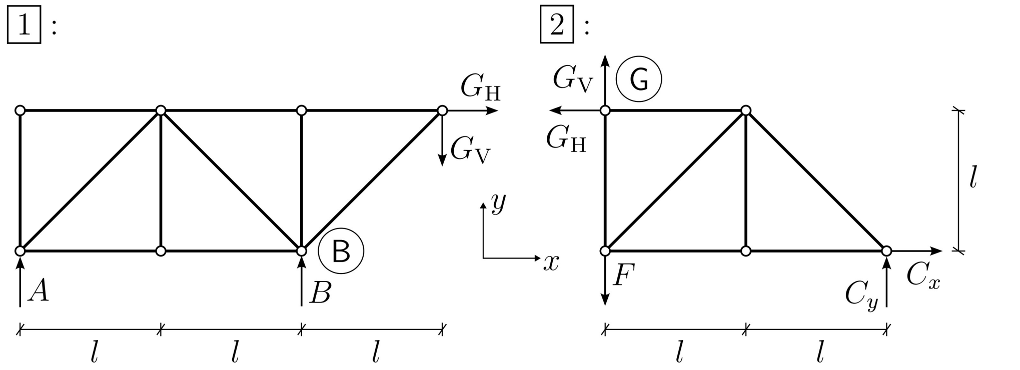
a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen an den Knoten A, B und C.

b) Bestimmen Sie die Stabkräfte der Stäbe 1, 5, 6, 7, 8 und 16.

Gegeben: l, F.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) • Freikörperbild



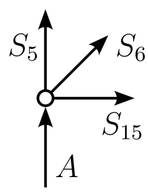
• Gleichgewicht

$$
\begin{array}{llll}
\text{Gesamtsystem:} & \rightarrow: & C_x = 0 & \\
\boxed{2}: & \overset{\curvearrowleft}{\mathsf{G}}: & C_y \cdot 2l + C_x \cdot l = 0 & \Rightarrow C_y = 0 \\
\text{Gesamtsystem:} & \overset{\curvearrowleft}{\mathsf{B}}: & -A \cdot 2l - F \cdot l + C_y \cdot 3l = 0 & \Rightarrow A = -\dfrac{F}{2} \\
 & \uparrow: & B + A + C_y - F = 0 & \Rightarrow B = \dfrac{3}{2}F
\end{array}
$$

b) • Nullstäbe

$$S_1 = S_5 = S_7 = 0$$

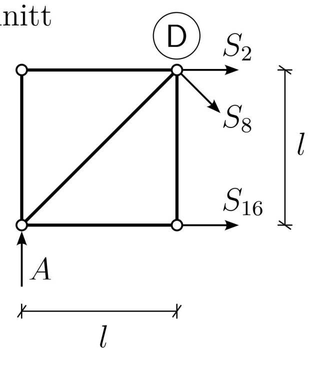
• Knotenpunktverfahren



$$\uparrow: \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_6 + S_5 + A = 0$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

• Ritterschnitt



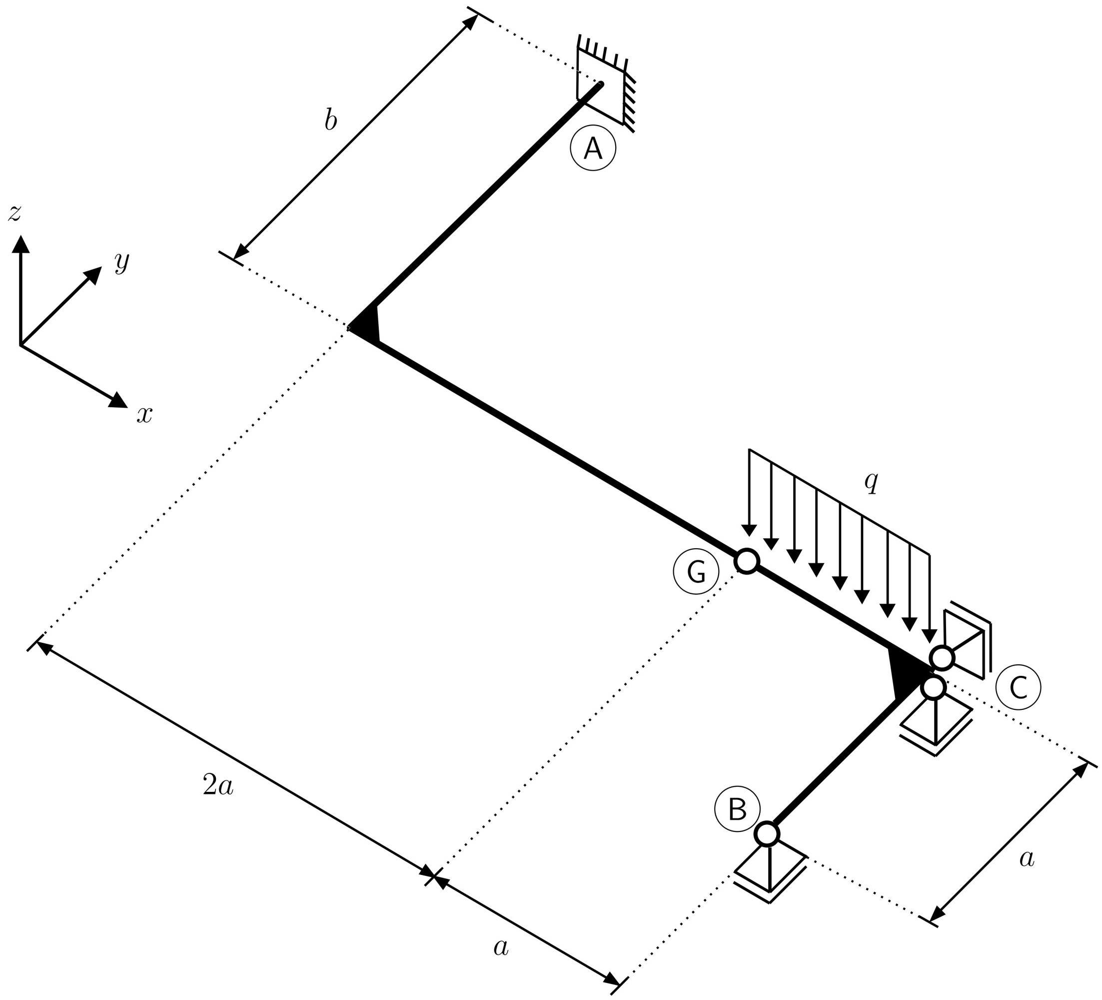
$$\uparrow: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} S_8 + A = 0$$

$$\Rightarrow S_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathsf{D}}: \quad S_{16} \cdot l - A \cdot l = 0$$

$$\Rightarrow S_{16} = -\frac{F}{2}$$

3. Aufgabe: (ca. 19 % der Gesamtpunkte)



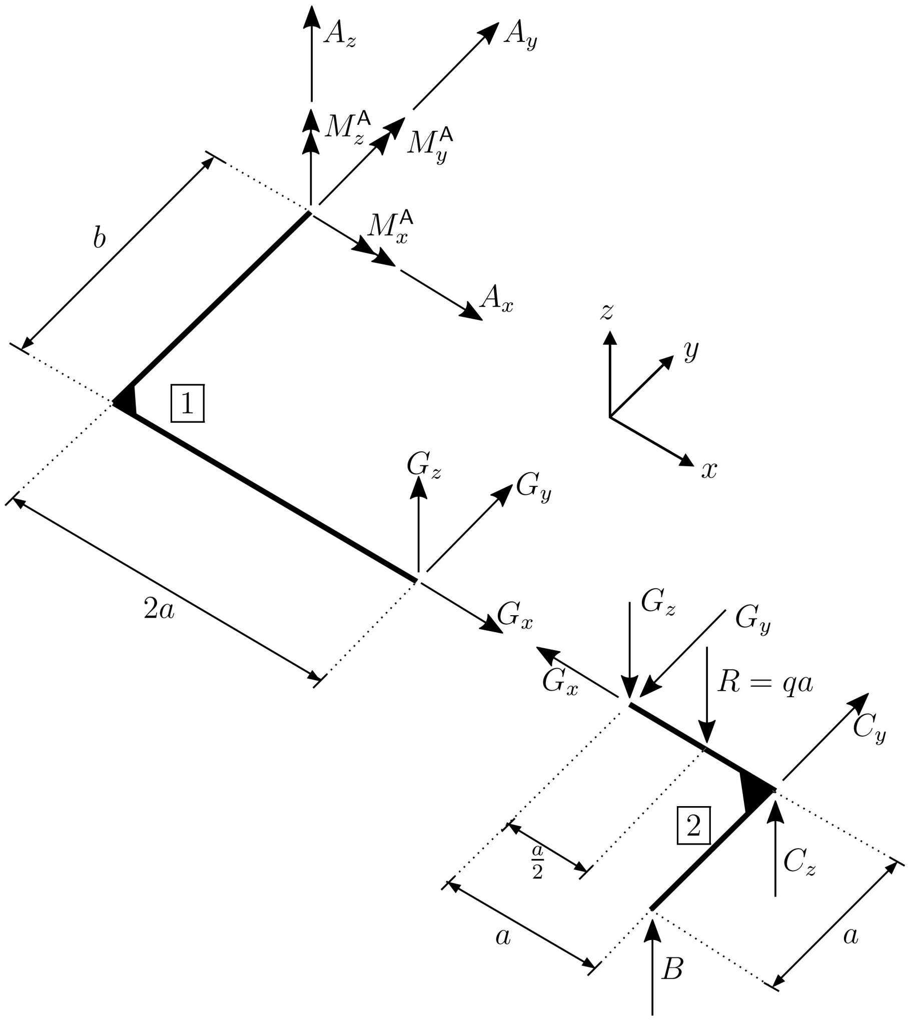
Zwei rechtwinklige, starre Rahmen sind mit einem Momentengelenk in G miteinander verbunden und der Darstellung entsprechend gelagert. Das Tragwerk wird durch eine konstante Streckenlast q belastet. Das System ist statisch bestimmt.

Berechnen Sie alle Lagerreaktionen für das räumliche Problem.

Gegeben: a, b, q.

Musterlösung - Aufgabe 3

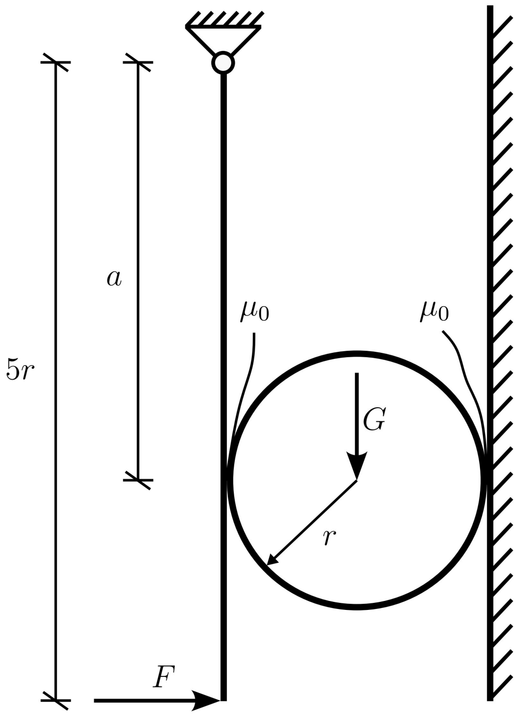
- Freikörperbild



- Gleichgewicht an Teilkörper 2 und am Gesamtsystem (GS)

$$
\begin{array}{llll}
\boxed{2}: & \sum M_{ix}^{(\mathsf{G})} = 0: & B \cdot a = 0 & \Rightarrow B = 0 \\
& \sum M_{iz}^{(\mathsf{G})} = 0: & C_y \cdot a = 0 & \Rightarrow C_y = 0 \\
& \sum M_{iy}^{(\mathsf{G})} = 0: & qa \cdot \dfrac{a}{2} - C_z \cdot a - B \cdot a = 0 & \Rightarrow C_z = \dfrac{qa}{2} \\
\text{GS:} & \sum F_{ix} = 0: & A_x = 0 & \Rightarrow A_x = 0 \\
& \sum F_{iy} = 0: & A_y + C_y = 0 & \Rightarrow A_y = 0 \\
& \sum F_{iz} = 0: & A_z - qa + B + C_z = 0 & \Rightarrow A_z = \dfrac{qa}{2} \\
& \sum M_{ix}^{(\mathsf{A})} = 0: & M_x^{\mathsf{A}} - B(a+b) - C_z \cdot b + qa \cdot b = 0 & \Rightarrow M_x^{\mathsf{A}} = -\dfrac{qab}{2} \\
& \sum M_{iy}^{(\mathsf{A})} = 0: & qa \cdot (2a + \dfrac{a}{2}) - B \cdot 3a - C_z \cdot 3a + M_y^{\mathsf{A}} = 0 & \Rightarrow M_y^{\mathsf{A}} = -qa^2 \\
& \sum M_{iz}^{(\mathsf{A})} = 0: & M_z^{\mathsf{A}} + C_y \cdot 3a = 0 & \Rightarrow M_z^{\mathsf{A}} = 0
\end{array}
$$

4. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)

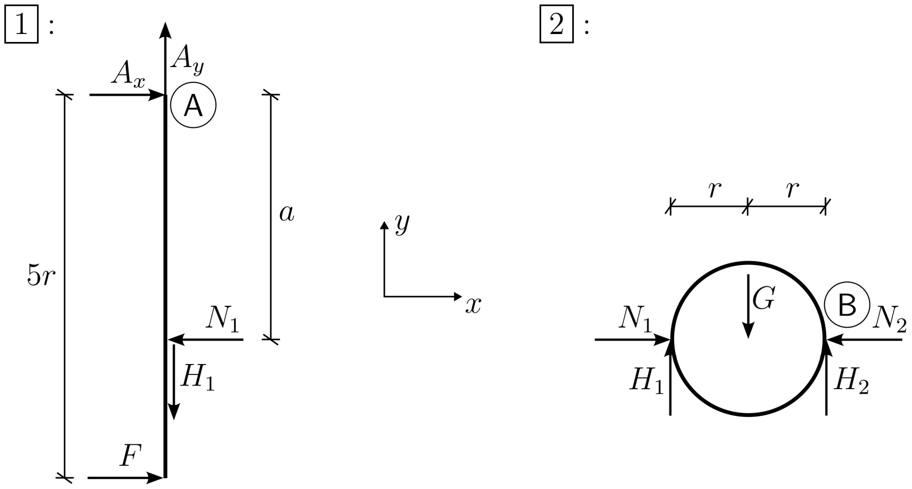


Ein kreisförmiger, starrer Körper mit dem Radius r wird durch den dargestellten Mechanismus eingeklemmt. Wie groß darf die Strecke a höchstens sein, damit sich der Körper nicht bewegt?

Gegeben: F, G, r, μ_0.

Musterlösung - Aufgabe 4

- Freikörperbild



- Gleichgewicht

$$
\begin{array}{llll}
\boxed{1}: & \overset{\curvearrowleft}{\mathsf{A}}: & -N_1 \cdot a + F \cdot 5r = 0 & \Rightarrow N_1 = F\,\dfrac{5r}{a} \\
\boxed{2}: & \overset{\curvearrowleft}{\mathsf{B}}: & -H_1 \cdot 2r + G \cdot r = 0 & \Rightarrow H_1 = \dfrac{G}{2} \\
 & \rightarrow: & N_1 - N_2 = 0 & \Rightarrow N_2 = N_1 \\
 & \uparrow: & H_2 + H_1 - G = 0 & \Rightarrow H_2 = H_1
\end{array}
$$

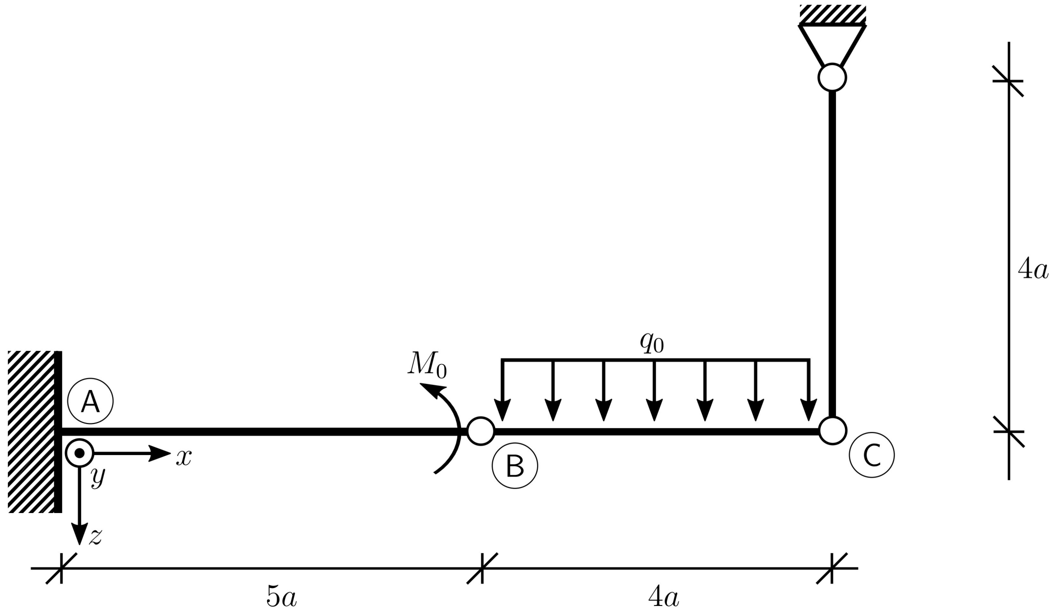
- Haftbedingungen

$$H_1 \leq \mu_0\, N_1, \quad H_2 \leq \mu_0\, N_2$$
$$\Rightarrow \frac{G}{2} \leq \mu_0\, F\, \frac{5r}{a}$$

- Auflösen

$$a \leq 10\, \mu_0\, \frac{F}{G}\, r$$

5. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Für das dargestellte, statisch bestimmte Tragwerk unter der Belastung einer konstanten Streckenlast q_0 und eines Einzelmomentes $M_0 = 2q_0a^2$ sind folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

a) Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen.

b) Bestimmen Sie im Bereich $\overline{\mathsf{BC}}$ die Funktionsverläufe sowohl für die Querkraft $Q(x)$ als auch für das Biegemoment $M(x)$.

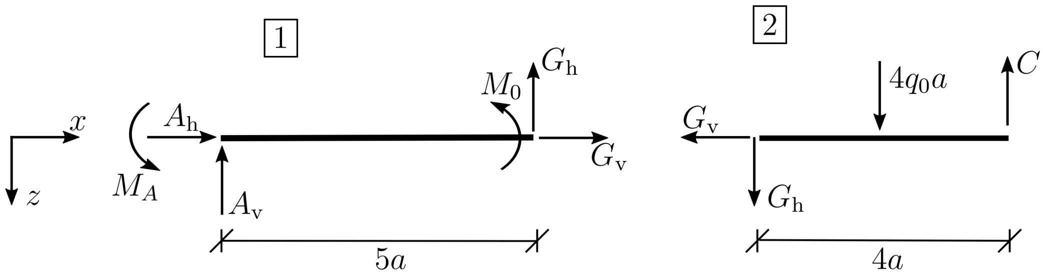
c) An welchem Punkt im Bereich $\overline{\mathsf{BC}}$ wird das Biegemoment extremal und welchen Wert nimmt es dort an?

d) Skizzieren Sie für das gesamte Tragwerk die Schnittgrößenverläufe (Normalkraft, Querkraft und Biegemoment) unter Angabe der wichtigsten Ordinaten.

Gegeben: a, q_0, $M_0 = 2q_0a^2$.

Musterlösung - Aufgabe 5

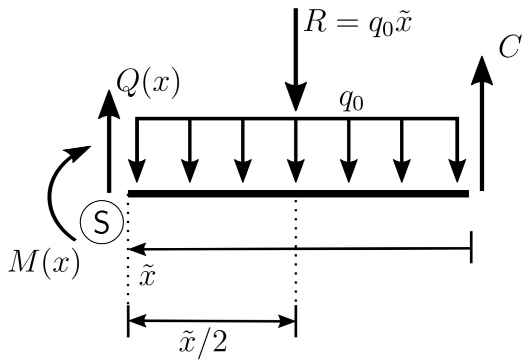
a) • Freikörperbild



• Gleichgewichtsbedingungen

$\boxed{2}$:	$\overset{\curvearrowleft}{\mathsf{G}}$:	$C \cdot 4a - 4q_0a \cdot 2a = 0$	$\Rightarrow C = 2q_0a$
Gesamtsystem:	$\rightarrow$:	$A_\mathrm{h} = 0$	$\Rightarrow A_\mathrm{h} = 0$
	$\uparrow$:	$A_\mathrm{v} + C - 4q_0a = 0$	$\Rightarrow A_\mathrm{v} = 2q_0a$
	$\overset{\curvearrowleft}{\mathsf{A}}$:	$M_A + M_0 - 4q_0a \cdot 7a + C \cdot 9a = 0$	$\Rightarrow M_A = 8q_0a^2$

b) • Schnitt am negativen Schnittufer, $\tilde{x} := 9a - x$ von C entfernt:



• Gleichgewichtsbedingungen

$$\uparrow: \quad Q(x) + C - q_0\tilde{x} = 0 \qquad \Rightarrow Q(x) = q_0(7a - x)$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathsf{S}}: \quad -M(x) + C \cdot \tilde{x} - q_0\tilde{x} \cdot \frac{\tilde{x}}{2} = 0 \qquad \Rightarrow M(x) = -\frac{1}{2}q_0(5a - x) \cdot (9a - x)$$

c) Biegemoment extremal an Stellen $x = \bar{x}$, wo Querkraft verschwindet:

$$Q(\bar{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \bar{x} = 7a$$

Extremum des Biegemoments:

$$M(7a) = -\frac{1}{2}q_0 \cdot (-2a) \cdot 2a = 2q_0a^2$$

d) Schnittgrößen-Skizze