Modulprüfung

Statik starrer Körper

22. August 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korrektur						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

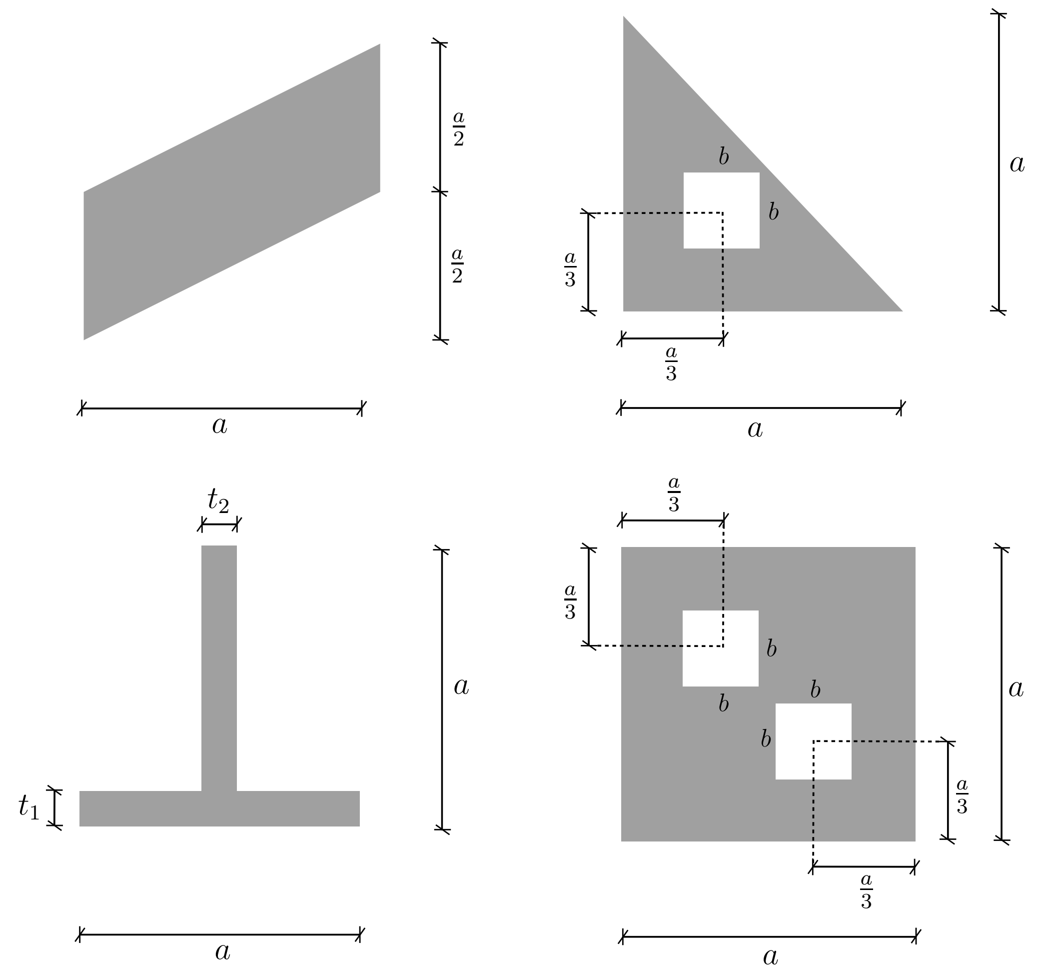
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Modulprüfung
Statik starrer Körper
22. August 2024

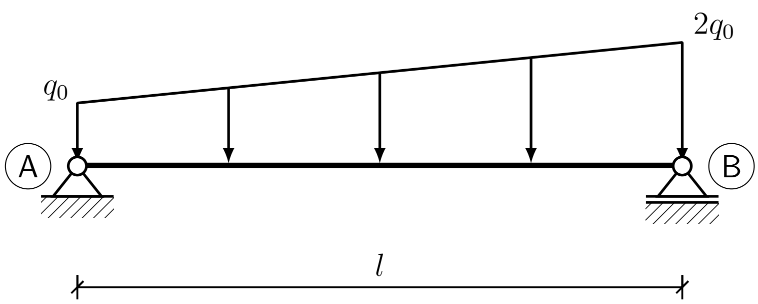
1. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)

a) Skizzieren Sie qualitativ die Lage der Flächenschwerpunkte in die dargestellten Scheiben.

Gegeben: a, b, t_1, t_2.



b) Bestimmen Sie für das dargestellte System sämtliche Lagerreaktionen am Knoten B.
Gegeben: q_0, l.

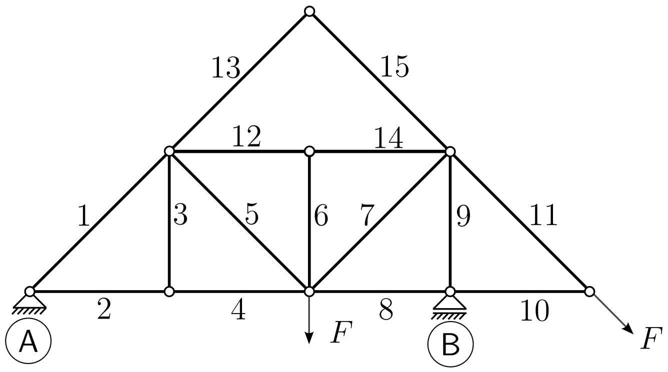


c) Analysieren Sie das abgebildete Fachwerk:

   i) Prüfen Sie die statische Bestimmtheit (mit Begründung),

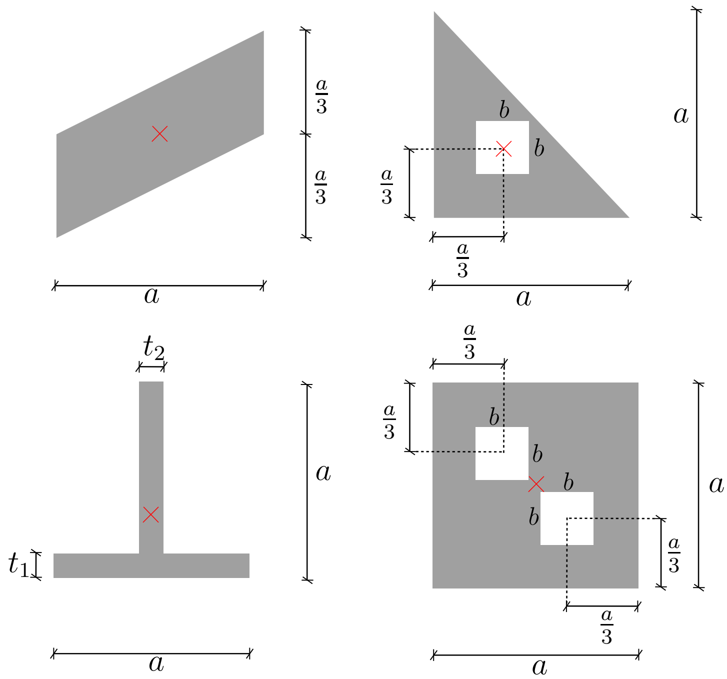
   ii) benennen Sie alle Nullstäbe.

   Gegeben: F.

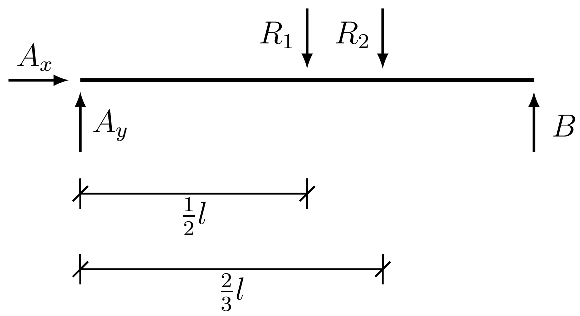


Musterlösung - Aufgabe 1

a)



b) - Freischnitt:



$$R_1 = q_0 l$$
$$R_2 = \frac{1}{2} q_0 l$$

- Gleichgewicht:

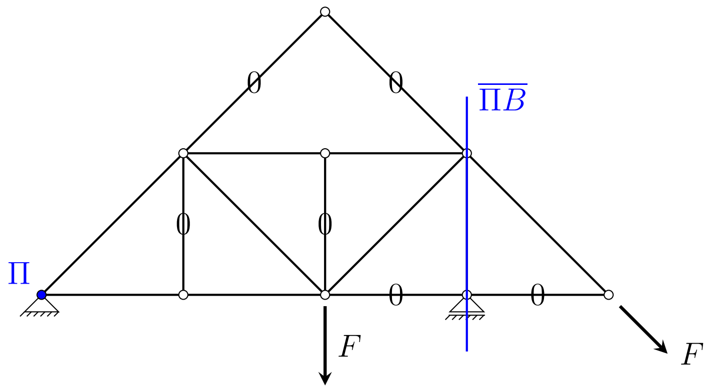
$$\overset{\curvearrowleft}{\mathsf{A}} : B \cdot l - R_1 \cdot \frac{1}{2} l - R_2 \cdot \frac{2}{3} l = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{6} q_0 l$$

c) i) das System ist statisch bestimmt, da gilt

- notw. Bed.: $2k = r + s \Rightarrow 2 \cdot 9 = 3 + 15 = 18 \Rightarrow$ erfüllt
- hinr. Bed.: nach 1. Bildungsgesetz aufgebaut (Fachwerk ist starr)
  Widerspruch im Polplan für Hauptpol $\Pi \neq \overline{\Pi B}$ (siehe Abbildung)

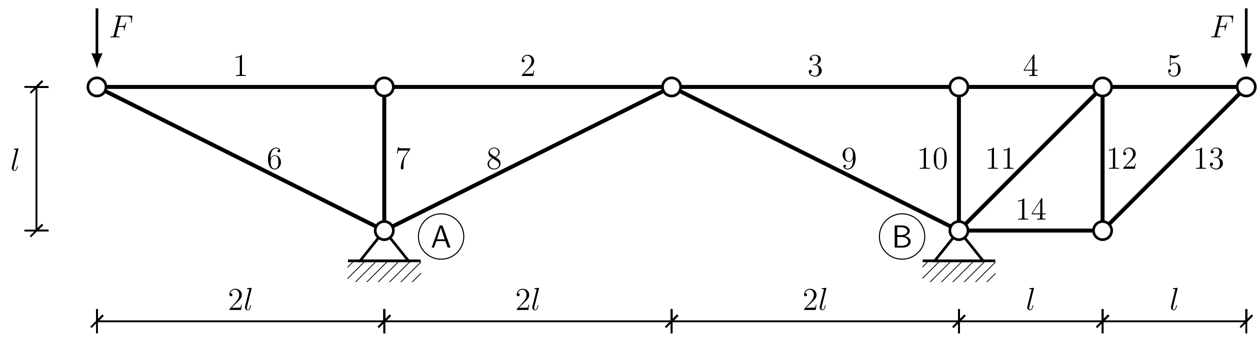
ii) Nullstäbe

$$S_3, S_6; \qquad S_{13}, S_{15}; \qquad S_{10}, S_8$$



0
0
$\overline{\Pi B}$
0
0
Π
0
0
F
F

2. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte, statisch bestimmte Tragwerk besteht aus 14 Stäben. Es wird in der abgebildeten Weise belastet. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

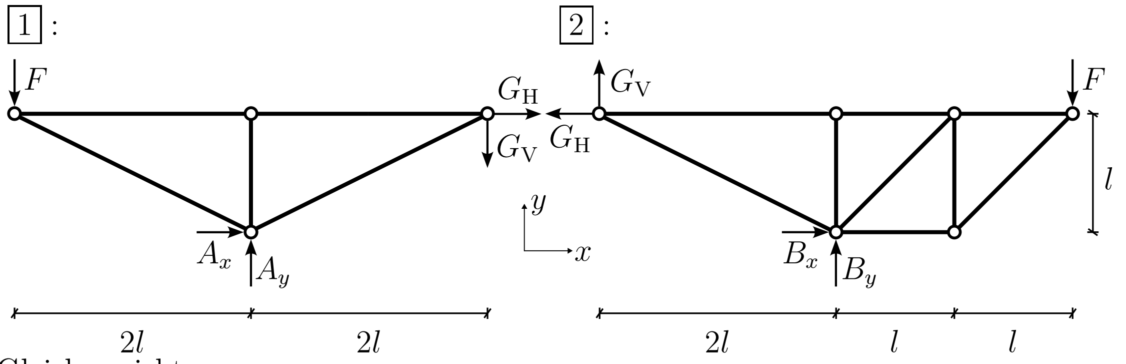
a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen an den Knoten A und B.

b) Bestimmen Sie die Stabkräfte der Stäbe $1, 4, 6$ und 14.

Gegeben: l, F.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) • Freikörperbild



• Gleichgewicht

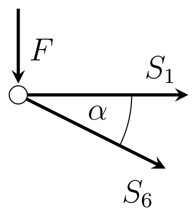
Gesamtsystem: $\overset{\curvearrowleft}{A}$: $B_y \cdot 4l - F \cdot 6l + F \cdot 2l = 0 \quad \Rightarrow B_y = F$

$\uparrow$: $A_y + B_y - F - F = 0 \quad \Rightarrow A_y = F$

$\boxed{1}$: $\overset{\curvearrowleft}{G}$: $A_x \cdot l - A_y \cdot 2l + F \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow A_x = -2F$

$\boxed{2}$: $\overset{\curvearrowleft}{G}$: $-B_x \cdot l + B_y \cdot 2l - F \cdot 4l = 0 \quad \Rightarrow B_x = 2F$

b) • Knotenpunktverfahren



Geometrie:

$$\sin\alpha = \frac{1l}{\sqrt{(1l)^2 + (2l)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2l}{\sqrt{(1l)^2 + (2l)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Gleichgewicht:

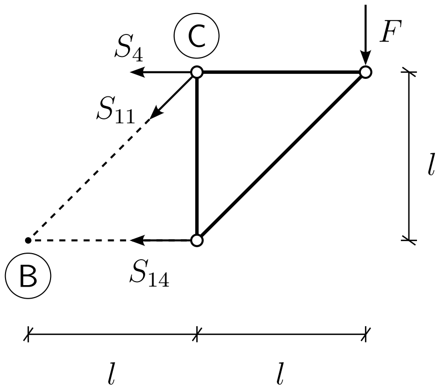
$\uparrow$: $-S_6 \cdot \sin\alpha - F = 0$

$\Rightarrow S_6 = -\sqrt{5}F$

$\rightarrow$: $S_1 + S_6 \cdot \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow S_1 = 2F$

• Ritterschnitt



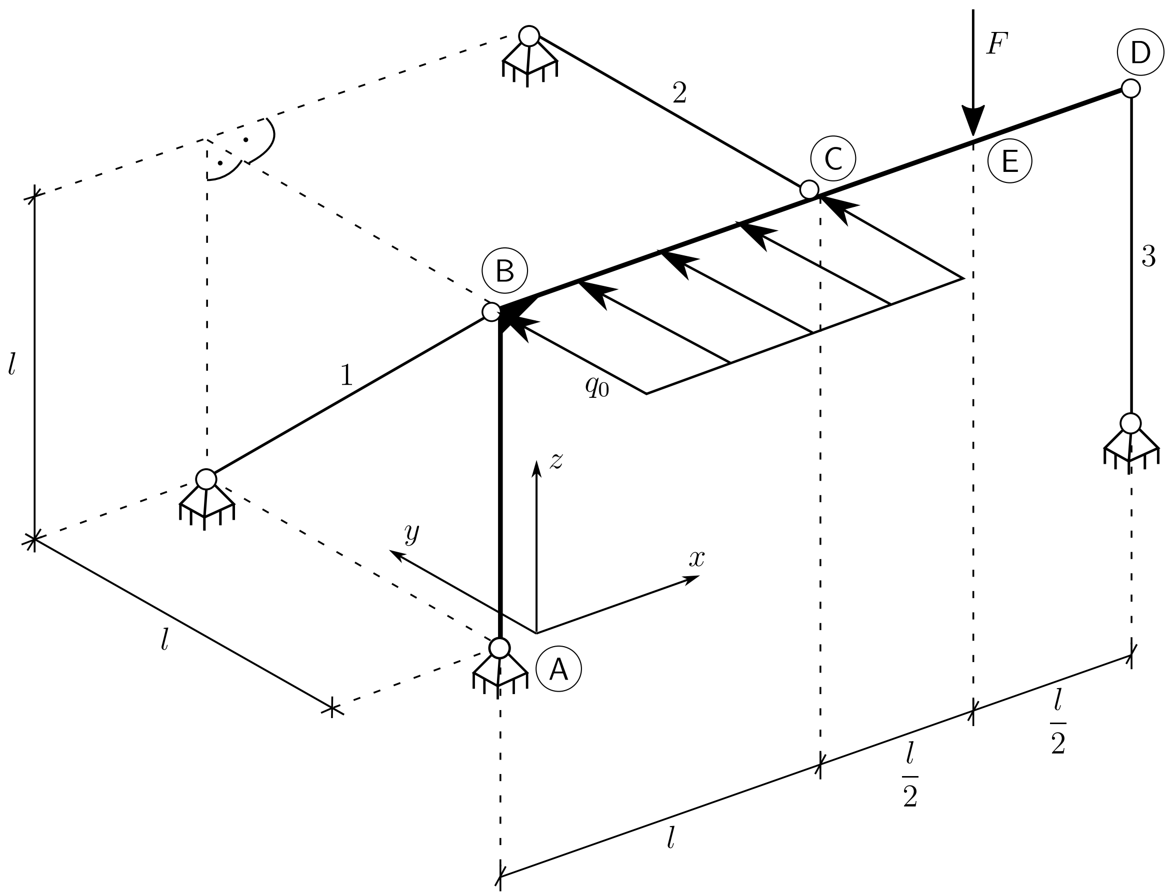
$\overset{\curvearrowleft}{C}$: $-S_{14} \cdot l - F \cdot l = 0$

$\Rightarrow S_{14} = -F$

$\overset{\curvearrowleft}{B}$: $S_4 \cdot l - F \cdot 2l = 0$

$\Rightarrow S_4 = 2F$

3. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)



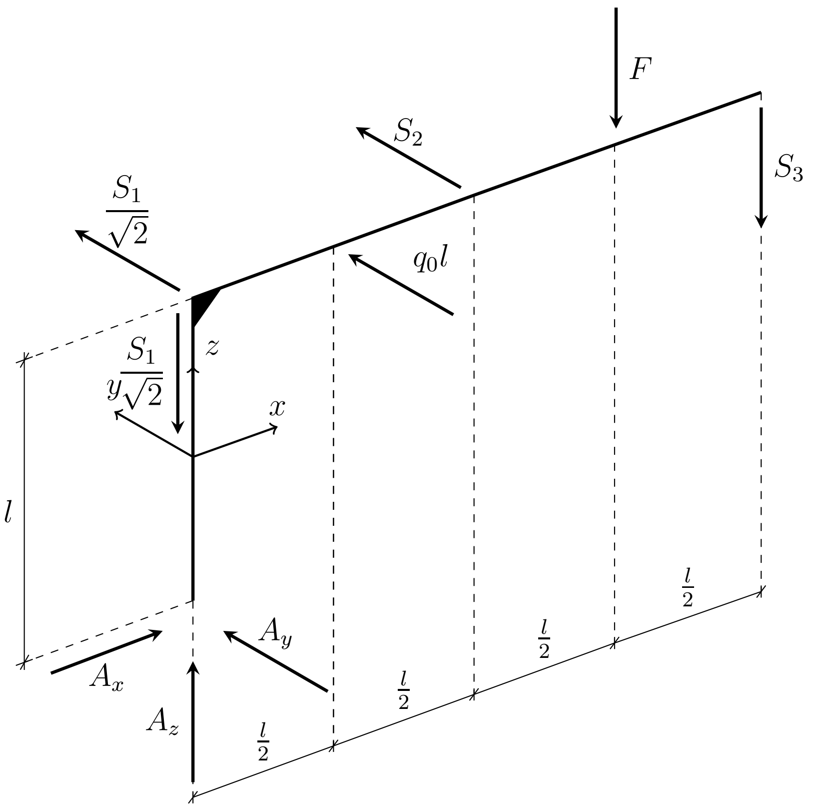
Ein rechtwinkliger, starrer Rahmen ABCD wird in A durch ein Festlager, in B durch den Stab 1, in C durch den Stab 2 und in D durch den Stab 3 gelagert. Er wird im Bereich BC durch die konstante Streckenlast q_0 und in E durch die Kraft F belastet. Das System ist statisch bestimmt.

Man berechne die Lagerreaktionen in A sowie die Stabkräfte der Stäbe 1, 2 und 3.

Gegeben: q_0, F, l.

Musterlösung - Aufgabe 3

- Freikörperbild:



- Momentengleichgewicht um A:

$$\sum M_{iz}^{(\mathsf{A})} = 0: \quad q_0 l \cdot \frac{l}{2} + S_2 \cdot l = 0 \qquad \Leftrightarrow S_2 = -\frac{q_0 l}{2}$$

$$\sum M_{ix}^{(\mathsf{A})} = 0: \quad -\frac{S_1}{\sqrt{2}} \cdot l - q_0 l \cdot l - S_2 \cdot l = 0 \qquad \Leftrightarrow S_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} q_0 l$$

$$\sum M_{iy}^{(\mathsf{A})} = 0: \quad F \cdot \frac{3}{2} l + S_3 \cdot 2l = 0 \qquad \Leftrightarrow S_3 = -\frac{3}{4} F$$

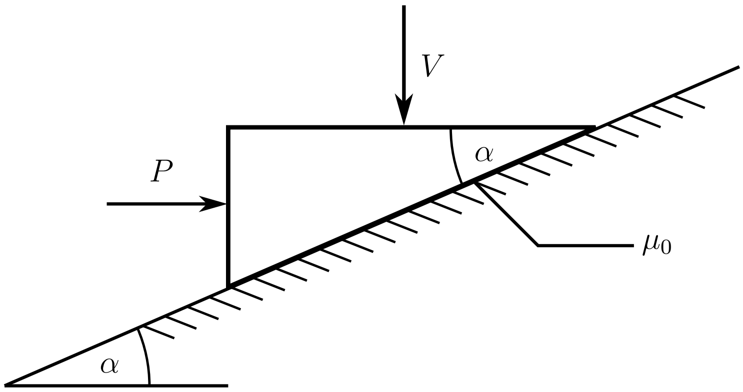
- Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad \Leftrightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + \frac{S_1}{\sqrt{2}} + q_0 l + S_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow A_y = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad A_z - \frac{S_1}{\sqrt{2}} - F - S_3 = 0 \qquad \Leftrightarrow A_z = \frac{1}{4} F - \frac{1}{2} q_0 l$$

4. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Ein starrer, gewichtsloser Keil liegt auf einer schrägen Ebene, die mit dem Winkel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gegen die Horizontale geneigt ist. Der Keil wird durch die gegebene Vertikalkraft V belastet und soll durch die horizontal angreifende Kraft P gegen eine Verschiebung gesichert werden. In der Kontaktfläche ist der Haftkoeffizient μ_0 anzunehmen.

a) Berechnen Sie die Größe der Kraft $P = P_1$ in Abhängigkeit des Neigungswinkels α so, dass ein Abwärtsgleiten des Keils gerade noch verhindert wird.

b) Berechnen Sie die Größe der Kraft $P = P_2$ in Abhängigkeit des Neigungswinkels α so, dass gerade noch kein Aufwärtsgleiten des Keils erfolgt.

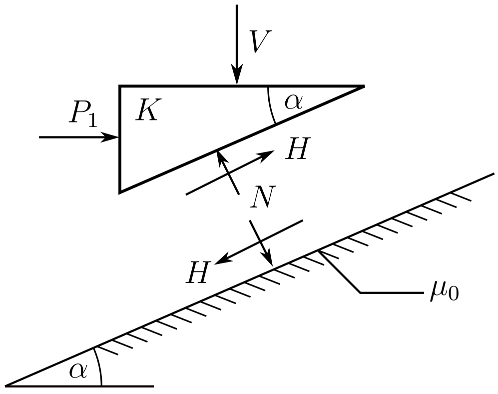
c) Ab welchem Neigungswinkel $\alpha = \alpha^*$ wird keine Horizontalkraft P benötigt, um den Keil gegen Gleiten zu sichern?

Gegeben: V, μ_0, α.

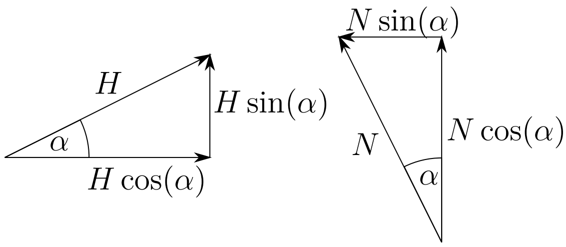
Musterlösung - Aufgabe 4

a) Sicherung gegen Abwärtsgleiten (Grenzzustand):

$$\begin{aligned}
\downarrow:&\quad V - N\cos(\alpha) - H\sin(\alpha) = 0\\
\rightarrow:&\quad V - N\cos(\alpha) - \mu_0 N\sin(\alpha) = 0\\
\Leftrightarrow&\quad V - N(\cos(\alpha) + \mu_0\sin(\alpha)) = 0\\
\Leftrightarrow&\quad N = \frac{V}{\cos(\alpha) + \mu_0\sin(\alpha)}
\end{aligned}$$

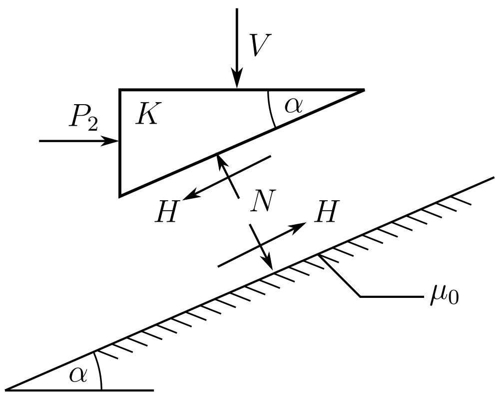


$$\begin{aligned}
\rightarrow:&\quad P_1 + H\cos(\alpha) - N\sin(\alpha) = 0\\
\Rightarrow&\quad P_1 + \mu_0 N\cos(\alpha) - N\sin(\alpha) = 0\\
\Leftrightarrow&\quad P_1 + N(\mu_0\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) = 0\\
\Leftrightarrow&\quad P_1 = -\frac{V(\mu_0\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}{\cos(\alpha) + \mu_0\sin(\alpha)}\\
&\quad\;\;\, = V\frac{\sin(\alpha) - \mu_0\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + \mu_0\sin(\alpha)}
\end{aligned}$$

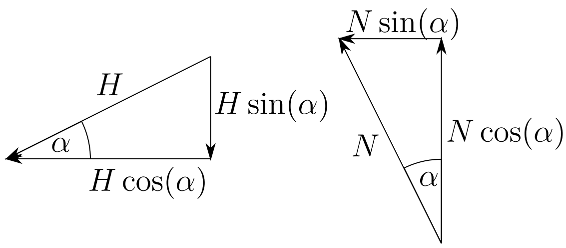


b) Sicherung gegen Aufwärtsgleiten (Grenzzustand):

$$\begin{aligned}
\downarrow:&\quad V - N\cos(\alpha) + H\sin(\alpha) = 0\\
\Rightarrow&\quad V - N\cos(\alpha) + \mu_0 N\sin(\alpha) = 0\\
\Leftrightarrow&\quad N = \frac{V}{\cos(\alpha) - \mu_0\sin(\alpha)}
\end{aligned}$$



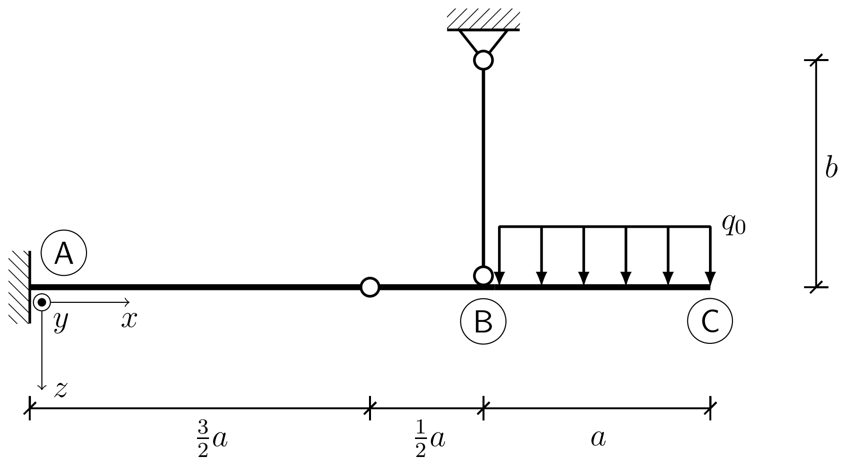
$$\begin{aligned}
\rightarrow:&\quad P_2 - H\cos(\alpha) - N\sin(\alpha) = 0\\
\Rightarrow&\quad P_2 - \mu_0 N\cos(\alpha) - N\sin(\alpha) = 0\\
\Leftrightarrow&\quad P_2 = V\frac{\sin(\alpha) + \mu_0\cos(\alpha)}{cos(\alpha) - \mu_0\sin(\alpha)}
\end{aligned}$$



c) $P_1 = 0$ (Bei $V \neq 0$):

$$\begin{aligned}
\Rightarrow&\quad 0 = \sin(\alpha^*) - \mu_0\cos(\alpha^*)\\
\Leftrightarrow&\quad \alpha^* = \arctan(\mu_0)
\end{aligned}$$

5. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Gegeben ist das dargestellte Modell einer abgehängten Decke. Für das statisch bestimmte Tragwerk unter der Belastung einer konstanten Streckenlast q_0 sind folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

a) Zeigen Sie, dass die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit erfüllt ist.

b) Vereinfachen Sie das System und bestimmen Sie alle Lager- und Gelenkreaktionen.

c) Bestimmen Sie im Bereich $\overline{\mathsf{AB}}$ den Funktionsverlauf für das Biegemoment $M_{\mathsf{AB}}(x)$ durch Freischnitt.

d) Bestimmen Sie im Bereich $\overline{\mathsf{BC}}$ den Funktionsverlauf für das Biegemoment $M_{\mathsf{BC}}(x)$ durch Integration.

e) Bestimmen Sie Richtung und Größe einer zusätzlichen Einzellast am Punkt C so, dass das Einspannmoment im Punkt A zu Null wird.

Gegeben: a, b, q_0.

Hinweis: Lösungen müssen im dargestellten Koordinatensystem angegeben werden. Abweichende Lösungswege werden bei Aufgabenteil c) und d) nicht bewertet.

Musterlösung - Aufgabe 5

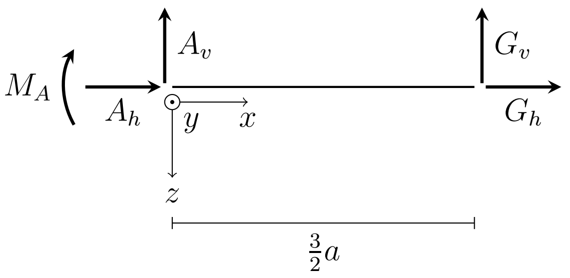
a) Nach Abbauen des Pendelstabs:

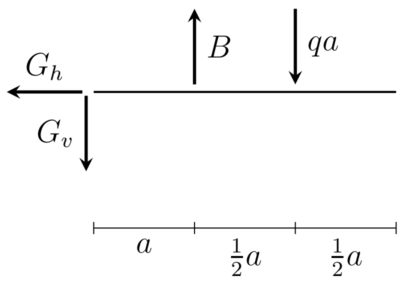
$$f = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0$$

oder für das ursprüngliche System:

$$f = 3 \cdot 3 - (5 + 4) = 0$$

b)

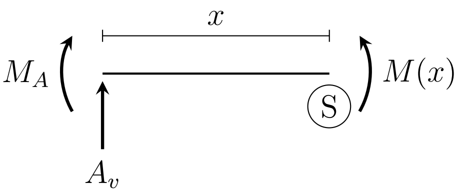




$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad & A_h = -G_h = 0 \\ \uparrow: \quad & A_v = -G_v = -qa \\ \overset{\curvearrowleft}{\mathsf{A}}: \quad & M_A = G_v \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}qa^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow: \quad & G_h = 0 \\ \overset{\curvearrowleft}{\mathsf{G}}: \quad & B = 2qa \\ \uparrow: \quad & G_v = qa \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} \overset{\curvearrowleft}{\mathsf{S}} \quad & : -M_A - A_v \cdot x + M(x) = 0 \\ & \Rightarrow M(x) = \frac{3}{2}qa^2 - qax \end{aligned}$$

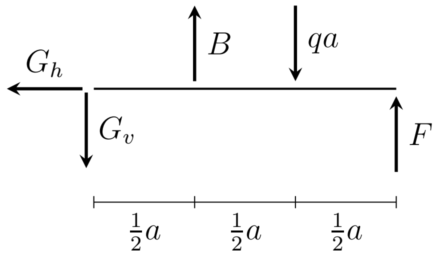
d)

$$\begin{aligned} q(x) &= q_0 \\ Q(x) &= -\int q_0 \, \mathrm{d}x + C_1 \\ &= -q_0 x + C_1 \\ M(x) &= \int Q \, \mathrm{d}x + C_2 \\ &= -\frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(3a) = 0 &\Rightarrow C_1 = 3q_0 a \\ M(3a) = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{2}q_0 9a^2 + 3q_0 a \cdot 3a + C_2 = 0 \\ &\Rightarrow C_2 = -\frac{9}{2}q_0 a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{1}{2}q_0 x^2 + 3q_0 ax - \frac{9}{2}q_0 a^2$$

e)



$\overset{\curvearrowleft}{\mathsf{G}}:\quad B\cdot\dfrac{1}{2}a = qa\cdot a - F\cdot\dfrac{3}{2}a \Rightarrow B = 2qa - 3F$

$\uparrow:\quad G_v = B - qa + F = qa - 2F$

Aus b) ist bekannt: $M_A = G_v \cdot \frac{3}{2}a$

$$M_A \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow G_v \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F = \frac{1}{2}qa \quad \text{(nach oben!)}$$