Modulprüfung

Statik starrer Körper

23. August 2023

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

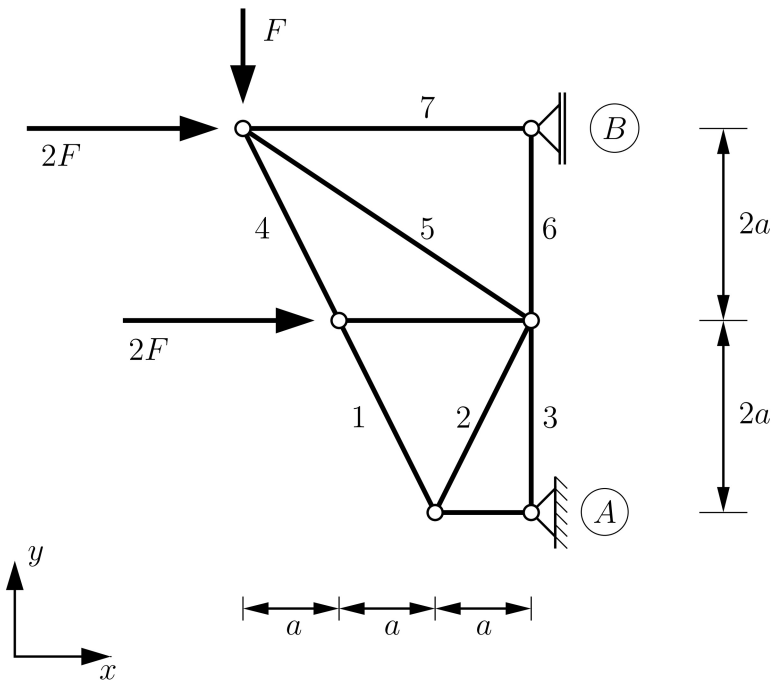
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das oben abgebildete Fachwerk.
Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

b) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen an den Knoten A und B.

c) Bestimmen Sie die Stabkräfte der Stäbe 1-3 mit dem Ritterschnittverfahren.

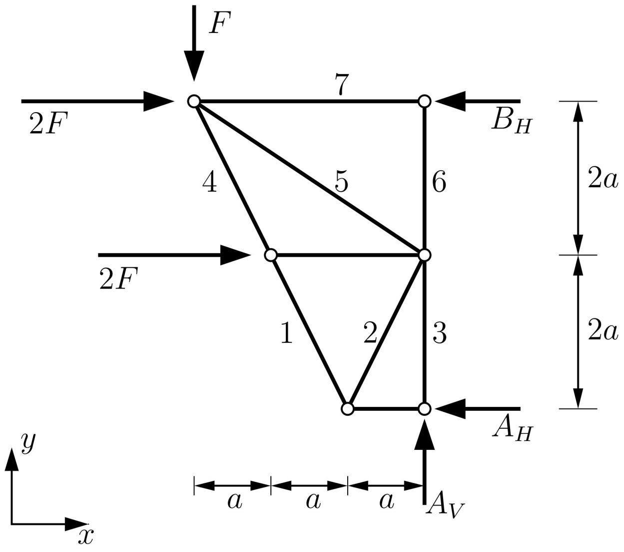
d) Bestimmen Sie die Stabkräfte der Stäbe 4-7 mit dem Knotenpunktverfahren.

Gegeben: F, a

Musterlösung - Aufgabe 1

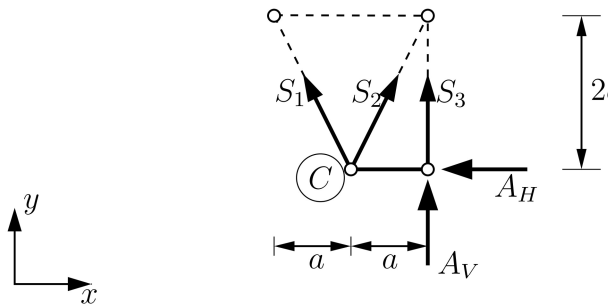
a) Fachwerk aus Dreiecken aufgebaut und statisch bestimmt gelagert.

b) Lagerreaktionen:



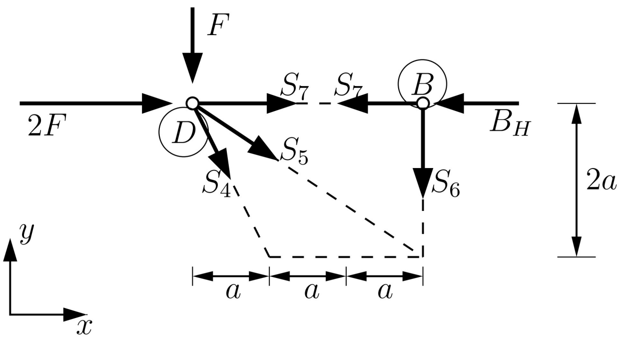
$$
\begin{aligned}
\sum M_A = 0: \quad 0 &= 4a \cdot B_H + 3a \cdot F - 2a \cdot 2F - 4a \cdot 2F \\
&= 4a \cdot B_H - 9 \cdot F \\
B_H &= \frac{9}{4}F \\
\sum F_H = 0: \quad 0 &= A_H + B_H - 4F \\
A_H &= -\frac{9}{4}F + \frac{16}{4} = \frac{7}{4}F \\
\sum F_V = 0: \quad A_V &= F
\end{aligned}
$$

c) Ritterschnittverfahren für Stäbe S_1 - S_3:



$$
\begin{aligned}
\sum M_C = 0: \quad 0 &= a \cdot A_V + a \cdot S_3 \\
S_3 &= -A_v = -F \\
\\
\sum F_V = 0: \quad 0 &= A_v + S_3 + \frac{2a}{\sqrt{5}a} S_1 + \frac{2a}{\sqrt{5}a} S_2 \\
S_1 &= -S_2 \\
\sum F_H = 0: \quad 0 &= A_H + \frac{a}{\sqrt{5}a} S_1 - \frac{a}{\sqrt{5}a} S_2 \\
&= \frac{7}{4} F - \frac{2a}{\sqrt{5}a} S_2 \\
S_2 &= \frac{7\sqrt{5}}{8} F \\
S_1 &= -\frac{7\sqrt{5}}{8} F
\end{aligned}
$$

d) Knotenpunktverfahren für Stäbe S_4 - S_7 :



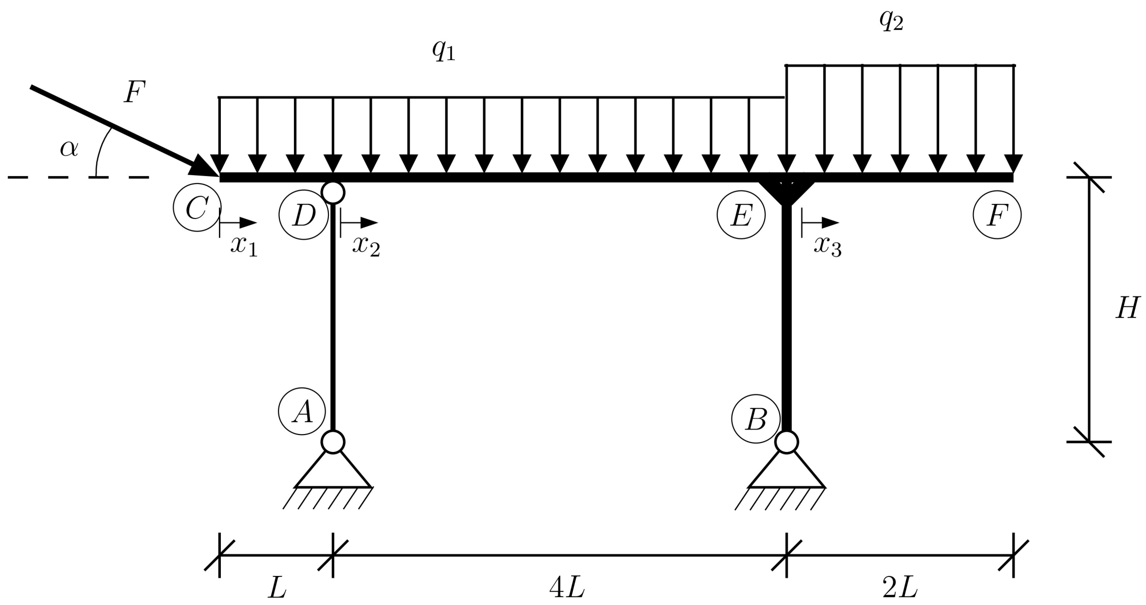
An Knoten B:

$$
\begin{aligned}
\sum F_H = 0: \quad S_7 &= -B_H = -\frac{9}{4} F \\
\sum F_V = 0: \quad S_6 &= 0
\end{aligned}
$$

An Knoten D:

$$
\begin{aligned}
\sum F_H = 0: \quad 0 &= -2F + \frac{9}{4} F - \frac{a}{\sqrt{5}a} S_4 - \frac{3a}{\sqrt{13}a} S_5 \\
&= -\frac{1}{4} F - \frac{a}{\sqrt{5}a} \left(\frac{-\sqrt{5}}{2} F - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} S_5 \right) - \frac{3a}{\sqrt{13}a} S_5 \\
&= -\frac{3}{4} F + \frac{1}{\sqrt{13}} S_5 - \frac{3}{\sqrt{13}} S_5 \\
S_5 &= \frac{3\sqrt{13}}{8} F \approx 1.35F \\
\sum F_V = 0: \quad 0 &= -F - \frac{2a}{\sqrt{5}a} S_4 - \frac{2a}{\sqrt{13}a} S_5 \\
S_4 &= -\frac{\sqrt{5}}{2} F - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} S_5 \\
S_4 &= -\frac{5}{2} F - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \frac{3\sqrt{13}}{8} F = -\frac{7\sqrt{5}}{8} F \approx -1.96F
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe: (ca. 32 % der Gesamtpunkte)



Das abgebildete Tragwerk wird durch zwei Streckenlasten q_1 und q_2 und eine Einzelkraft F belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich statischer Bestimmtheit (mit Begründung).

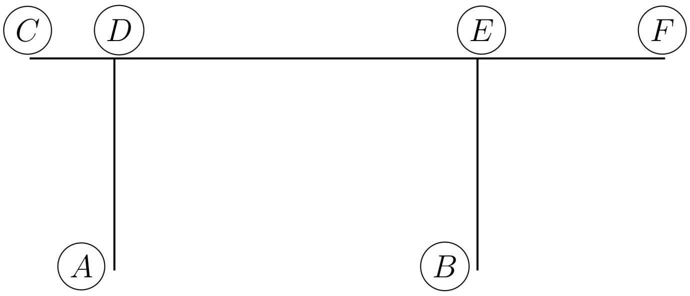
b) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A und B.

c) Berechnen Sie die Verläufe von M, Q und N in den drei Bereichen C-D, D-E und E-F. Benutzen Sie dafür die vorgegebenen Koordinaten x_1, x_2 und x_3.

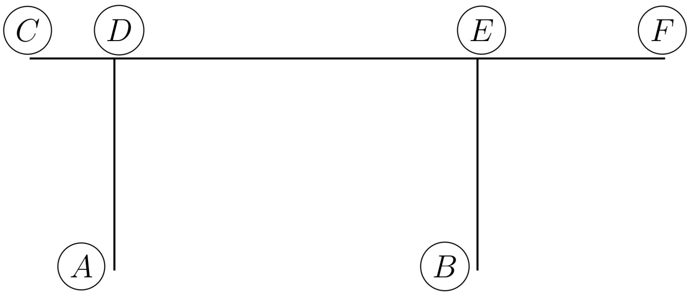
d) Skizzieren Sie **in der beigefügten Vorlage** die unter c) berechneten Verläufe sowie die entsprechenden Verläufe in den Bereichen A-D und E-B unter Angabe der maßgebenden Ordinaten.

Gegeben: $L,\ H = \frac{4}{\sqrt{3}}L,\ q_1,\ q_2 = 1.5q_1,\ F = q_1 L,\ \alpha = 30°$

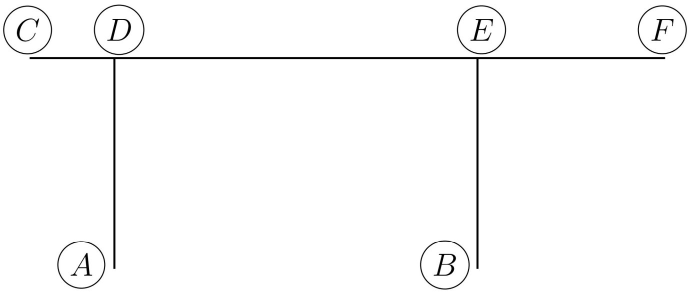
Normalkraft:



Querkraft:



Moment:

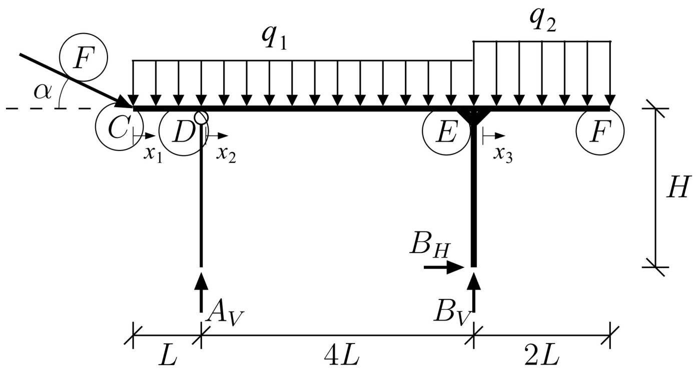


Musterlösung - Aufgabe 2

a) Nachweis statische Bestimmtheit

gegebenes Tragwerk mit:	alternativ Pendelstütze abgebaut:
Lagerreaktionen $a = 4$ Gelenkreaktionen $g = 2 \cdot 1$ Körper $n = 2$	Lagerreaktionen $a = 3$ Gelenkreaktionen $g = 0$ Körper $n = 1$
$a + g = 3 \cdot n$ $4 + 2 = 3 \cdot 2 \quad \checkmark$	$a + g = 3 \cdot n$ $3 + 0 = 3 \cdot 1 \quad \checkmark$
Tragwerk ist nicht kinematisch (Dreigelenkbogen) → Tragwerk ist statisch bestimmt	Tragwerk ist nicht kinematisch gelagert → Tragwerk ist statisch bestimmt

b) Lagerreaktionen in A und B

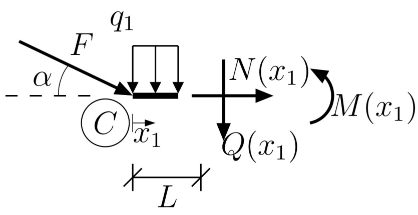


$F_y = F \cdot \sin 30°$
$F_x = F \cdot \cos 30°$
$\underline{A_H = 0}$

$$\sum M^B = 0: \quad A_V \cdot 4L = F_y \cdot 5L + q_1 \cdot 5L \cdot \frac{5L}{2} - q_2 \cdot 2L \frac{2L}{2} - F_x \cdot H$$
$$= \frac{1}{4L}\left(\frac{5}{2}q_1L^2 + \frac{25}{2}q_1L^2 - 3q_1L^2 - 2q_1L^2\right) = \underline{\frac{5}{2}q_1L}$$
$$\sum F_{ix} = 0: \quad B_H = -F \cdot \cos 30° = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}F} = -\frac{\sqrt{3}}{2}q_1L$$
$$\sum F_{iy} = 0: \quad B_V = F \cdot \sin 30° + q_1 \cdot 5L + q_2 \cdot 2L - A_V$$
$$= \frac{1}{2}q_1L + 5q_1L + 3q_1L - \frac{5}{2}q_1L = \underline{6q_1L}$$

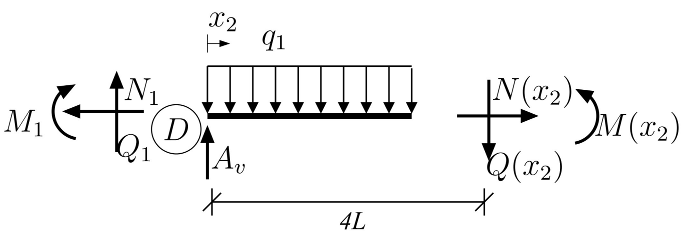
c) Bestimmung der M-, Q-, und N-Verläufe mit den gegebenen Koordinaten

Bereich C - D



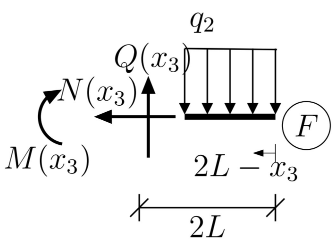
$$
\begin{aligned}
N(x_1) &= -F\cdot\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}q_1L = N_1\\
Q(x_1) &= -F\cdot\sin 30^\circ - q_1x_1 = -q_1x_1 - \frac{1}{2}q_1L\\
M(x_1) &= -F\cdot\sin 30^\circ\cdot x_1 - q_1\frac{x_1^2}{2} = -\frac{1}{2}q_1x_1^2 - \frac{1}{2}q_1Lx_1\\
&\quad Q(0) = -\frac{1}{2}q_1L,\quad Q(L) = -\frac{3}{2}q_1L = Q_1,\\
&\quad M(0) = 0,\qquad M(L) = -q_1L^2 = M_1
\end{aligned}
$$

Bereich D - E



$$
\begin{aligned}
N(x_2) &= N_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}q_1L\\
Q(x_2) &= Q_1 + A_V - q_1x_2 = q_1L - q_1x_2\\
M(x_2) &= M_1 + Q_1\cdot x_2 + A_V\cdot x_2 - q_1\frac{x_2^2}{2}\\
&= -q_1L^2 + q_1Lx_2 - \frac{1}{2}q_1x_2^2\\
&\quad Q(0) = q_1L,\qquad Q(4L) = -3q_1L,\\
&\quad M(0) = -q_1L^2,\quad M(L) = -5q_1L^2\\
&\quad Q(x_2) = 0 \text{ bei } x_2 = L \;\rightarrow\; M(L) = -\frac{1}{2}q_1L^2
\end{aligned}
$$

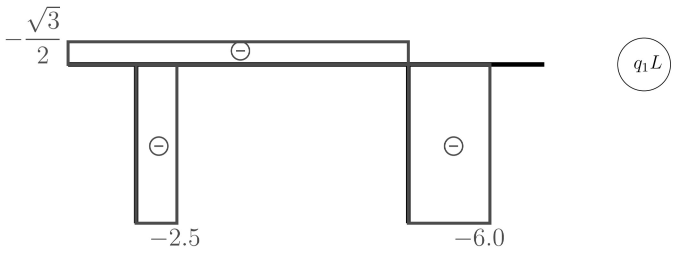
Bereich E - F



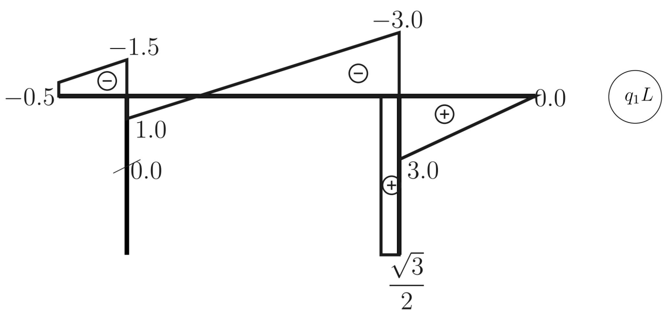
$$
\begin{aligned}
N(x_3) &= 0 \\
Q(x_3) &= q_2 \cdot (2L - x_3) = 3q_1L - \frac{3}{2}q_1x_3 \\
M(x_3) &= -\frac{1}{2}q_2 \cdot (2L - x_3)^2 = -3q_1L^2 + 3q_1Lx_3 - \frac{3}{4}q_1x_3^2 \\
&\quad Q(0) = 3q_1L, \qquad Q(2L) = 0, \\
&\quad M(0) = -3q_1L^2, \quad M(2L) = 0
\end{aligned}
$$

d) Verläufe in Vorlage skizziert

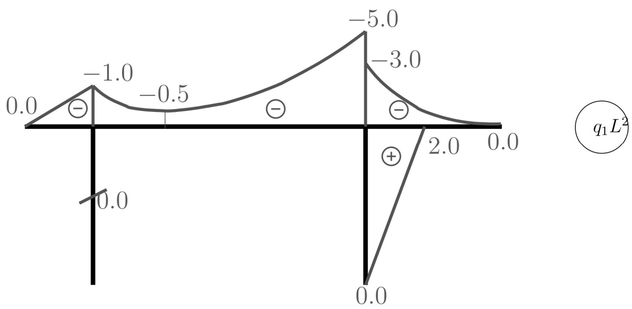
Normalkraft:



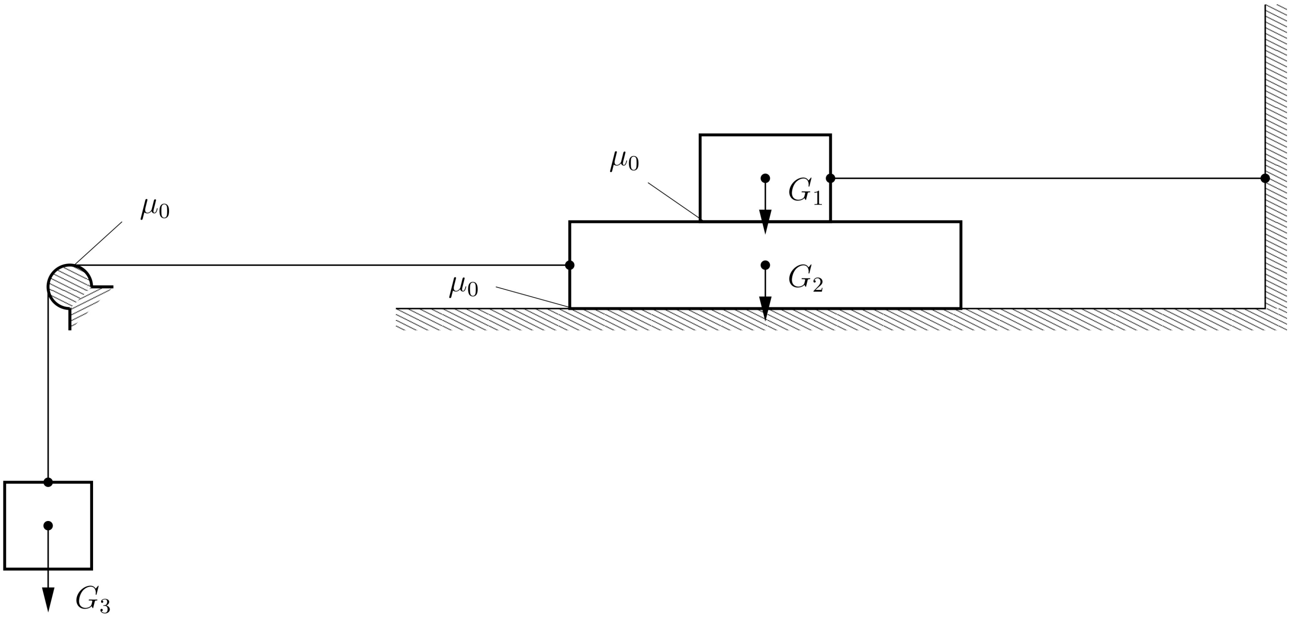
Querkraft:



Moment:



3. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)

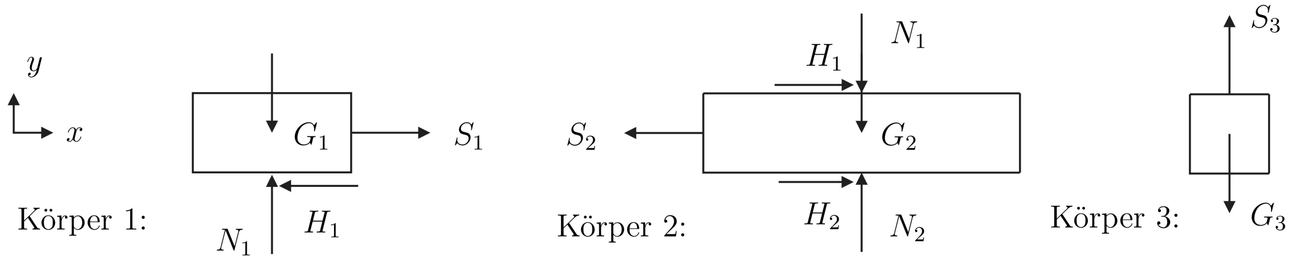


Berechnen Sie für das dargestellte System die maximal mögliche Gewichtskraft G_3, so dass das System in Ruhe bleibt, wobei die Gewichtskräfte G_1 und G_2 sowie der Haftreibungskoeffizient μ_0 gegeben sind.

Gegeben: G_1, G_2, μ_0

Musterlösung - Aufgabe 3

Freischnitt



Gegeben: $\mu_0, G_1, G_2, \alpha = \pi/2$

Gesucht: G_{3max} sodass das System in Ruhe bleibt

GGW

$$\text{Körper 1:} \quad \sum F_{ix} = 0 : \quad S_1 - H_1 = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0 : \quad N_1 - G_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = G_1 \tag{2}$$

$$\text{Körper 2:} \quad \sum F_{ix} = 0 : \quad -S_2 + H_1 + H_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = H_1 + H_2 \tag{3}$$

$$\sum F_{iy} = 0 : \quad N_2 - G_2 - N_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_2 = G_2 + N_1 \tag{4}$$

$$\text{Körper 3:} \quad \sum F_{iy} = 0 : \quad S_3 - G_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_3 = G_3 \tag{5}$$

Grenzfall Haftung:

$$H_1 = \mu_0 \, N_1 \tag{6}$$

$$H_2 = \mu_0 \, N_2 \tag{7}$$

$$S_3 = S_2 \, e^{\mu_0 \, \alpha} \quad \text{da} \quad S_3 > S_2, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

$G_{3max} =?$

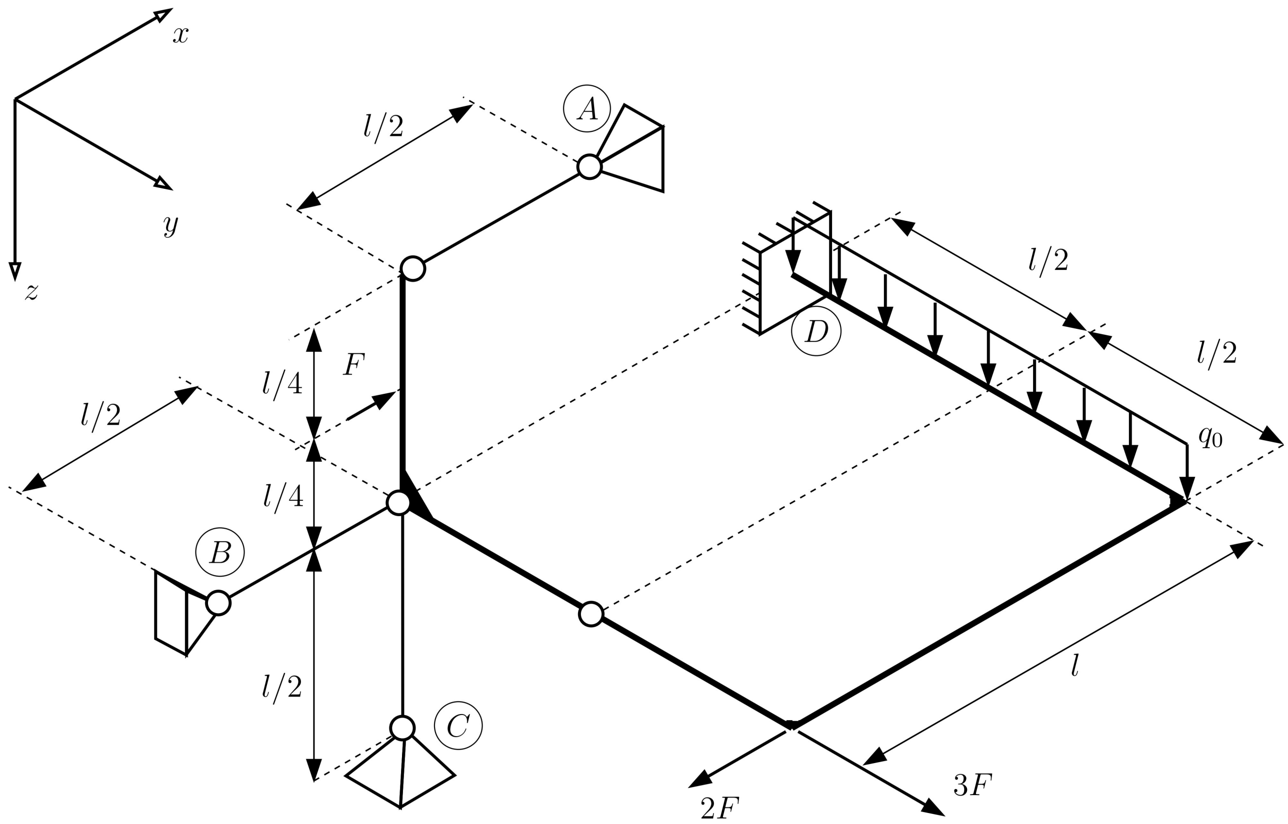
(**??**) in (**??**):

$$G_3 = S_2 \, e^{\mu_0 \, \frac{\pi}{2}} \qquad \Big| \; (\textbf{??}), (\textbf{??}) \text{ und } (\textbf{??})$$

$$\Rightarrow \qquad G_3 = \mu_0 \, (N_1 + N_2) \, e^{\mu_0 \, \frac{\pi}{2}} \qquad \Big| \; (\textbf{??}) \text{ und } (\textbf{??})$$

$$\Rightarrow \qquad G_3 = \mu_0 \, (2 \, G_1 + G_2) \, e^{\mu_0 \, \frac{\pi}{2}}$$

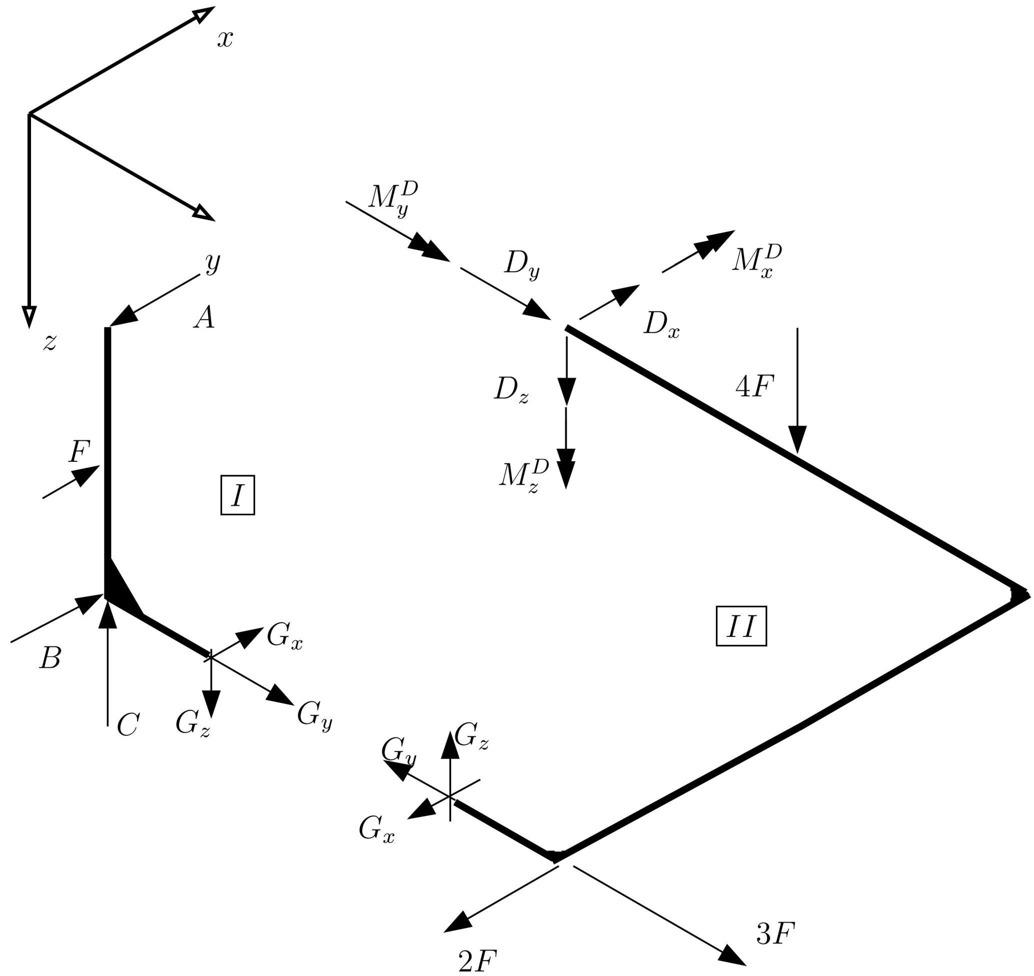
4. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Berechnen Sie alle Lagerreaktionen und Gelenkkräfte des oben dargestellten räumlichen Systems unter Verwendung des gegebenen Koordinatensystems.

Gegeben: $l, F, q_0 = \dfrac{4F}{l}$

Musterlösung - Aufgabe 4 Freischnitt



Gleichgewicht:

$\boxed{I}$:

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = F + B + G_x - A \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad 0 = G_y \tag{2}$$

$$\sum F_{iz} = 0: \qquad 0 = -C + G_z \tag{3}$$

$$\sum M_x^{(G)} = 0: \qquad 0 = C \cdot \frac{1}{2}l \tag{4}$$

$$\sum M_y^{(G)} = 0: \qquad 0 = A \cdot \frac{1}{2}l - F \cdot \frac{1}{4}l \tag{5}$$

$$\sum M_z^{(G)} = 0: \qquad 0 = -A \cdot \frac{1}{2}l + F \cdot \frac{1}{2}l + B \cdot \frac{1}{2}l \tag{6}$$

$\boxed{II}$:

$$\sum F_{ix} = 0: \qquad 0 = D_x - G_x - 2F \tag{7}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \qquad 0 = D_y + 3F - G_y \tag{8}$$

$$\sum F_{iz} = 0: \qquad 0 = D_z + 4F - G_z \tag{9}$$

$$\sum M_x^{(D)} = 0: \qquad 0 = M_x^D - G_z \cdot \frac{1}{2}l + 4F \cdot \frac{1}{2}l \tag{10}$$

$$\sum M_y^{(D)} = 0: \qquad 0 = M_y^D - G_z \cdot l \tag{11}$$

$$\sum M_z^{(D)} = 0: \qquad 0 = M_z^D + G_x \cdot \frac{1}{2}l + G_y \cdot l - 3F \cdot l + 2F \cdot l \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
&(??): \quad G_x = 0 \qquad &&(??): \quad G_z = 0 \qquad &&(??): B = -\frac{1}{2}F \\
&(??): \quad D_x = 2F \qquad &&(??): D_y = -3F \qquad &&(??): D_z = -4F \\
&(??): M_x^{(D)} = -2Fl \qquad &&(??): \ M_y^{(D)} = 0 \qquad &&(??): M_z^{(D)} = Fl
\end{aligned}
$$