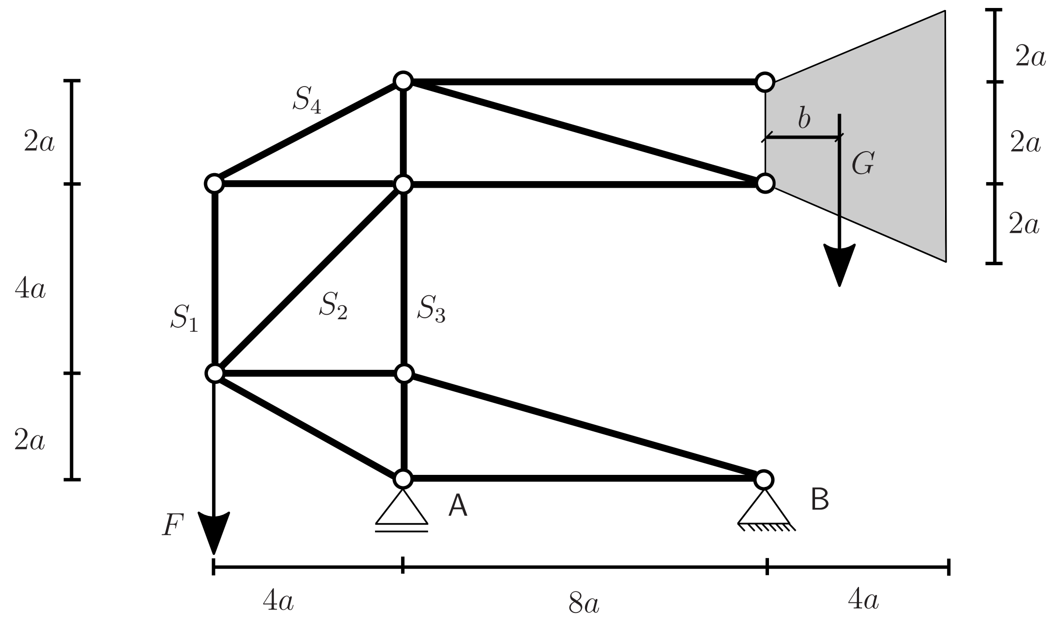
1. Aufgabe (ca. 27.5 % der Gesamtpunktzahl)



Das dargestellte Tragwerk besteht aus 14 Stäben und einer starren Scheibe. Es wird durch die Kraft F und durch die Gewichtskraft G (im Schwerpunkt der starren Scheibe) belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

b) Weisen Sie nach, dass $b = \frac{7}{3}a$ für die Schwerpunktkoordinate der Scheibe gilt.

c) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B für den Fall $b = \frac{7}{3}a$.

d) Bestimmen Sie die Stabkräfte S_1, S_2, S_3 und S_4.

Gegeben: $a,\ G,\ F = \dfrac{7}{36}G.$

1. Aufgabe

a) Es gilt:

$$a + g = 3n$$

a = Lagerbedingungen
g = Gelenke
n = Anzahl Körper

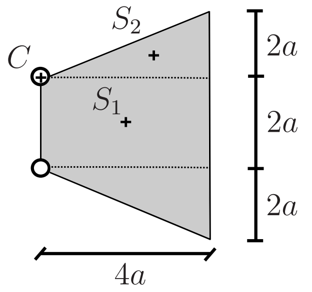
Da das Tragwerk aufgrund der Struktur als ein Körper betrachtet werden kann, folgt mit $n = 1, g = 0$ und $a = 3$

$$3 + 0 = 3 = 3 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad \textit{hinreichend bestimmt}$$
$$\textit{nicht kinematisch gelagert} \quad \rightarrow \quad \textit{notwendig bestimmt}$$

$\Rightarrow$ *Innerlich und äußerlich bestimmt*

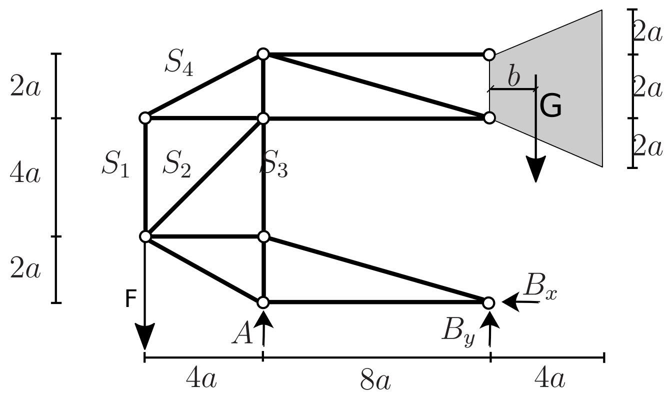
b) Es gilt: $x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$

Daraus folgt für den Drehpunkt um C:



$$b = \frac{(2a \cdot 4a) \cdot 2a + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4a}{2a \cdot 4a + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a)} = \frac{16a^3 + \frac{64}{3}a^3}{8a^2 + 8a^2} = \frac{7}{3}a$$

c) Für die Gleichgewichtsbedingungen gilt:



$$\sum F_{ix} = 0: \quad \rightarrow \quad B_x = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0: \quad \rightarrow \quad B_y + A - F - G = 0$$
$$\sum M^B = 0: \quad \rightarrow \quad 12a \cdot F - \frac{7}{3}a \cdot G - 8a \cdot A = 0$$

Daraus folgt:

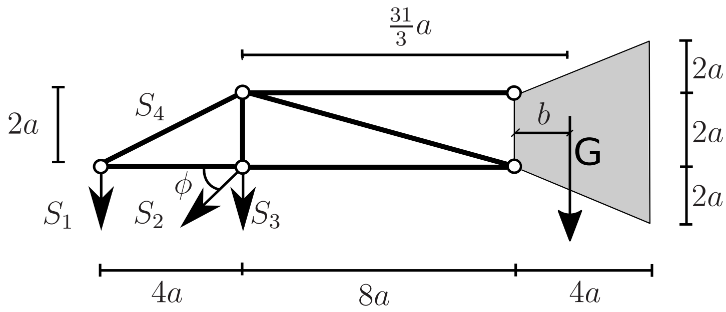
$\sum M^B = 0:$

$$
\begin{aligned}
12a \cdot \frac{37}{6}G - \frac{7}{3}a \cdot G - 8a \cdot A &= 0 \\
8a \cdot A &= 12a \cdot \frac{37}{6}G - \frac{7}{3}a \cdot G \\
A &= 0
\end{aligned}
$$

$\sum F_{iy} = 0:$

$$
\begin{aligned}
B_y + A - F - G &= 0 \\
B_y &= F + G \\
B_y &= \frac{43}{26}G
\end{aligned}
$$

d) Für die Gleichgewichtsbedingungen mittels Ritterschnitt gilt:



$$
\begin{aligned}
\sum F_{ix} = 0: &\quad \rightarrow \quad S_2 cos(\phi) = 0 \\
\sum F_{iy} = 0: &\quad \rightarrow \quad -S_1 - S_3 - G = 0 \\
\sum M^P = 0: &\quad \rightarrow \quad 4a \cdot S_1 - \frac{31}{3}a \cdot G = 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

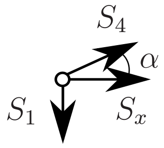
$\sum M^P = 0:$

$$
S_1 = \frac{31}{12}G
$$

$\sum F_{iy} = 0:$

$$
\begin{aligned}
-S_1 - S_3 - G &= 0 \\
S_3 &= -S_1 - G \\
S_3 &= -\frac{43}{12}G
\end{aligned}
$$

Für die Stabkraft S_4 folgt mit dem Knotenpunktverfahren:

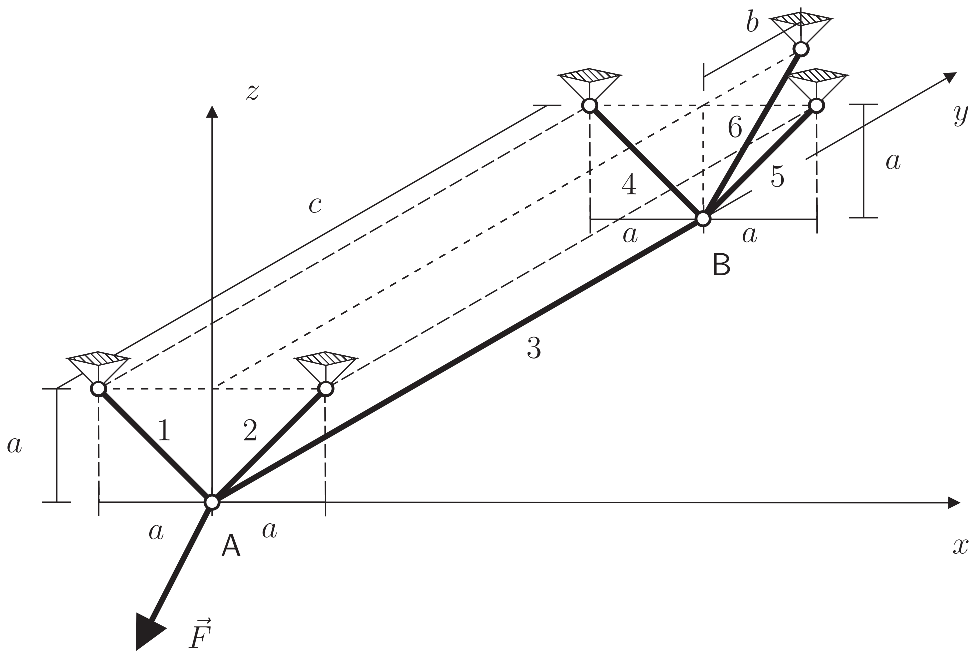


$$\sum F_{ix} = 0 : \quad \rightarrow \quad -S_1 + S_4 sin(\alpha) = 0$$

Mit $sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ folgt schließlich:

$$S_4 = \sqrt{5} S_1 = \sqrt{5} \frac{31}{12} G$$

2. Aufgabe (ca. 27.5 % der Gesamtpunktzahl)



Das aus gelenkig verbundenen Stäben bestehende System (Gerippe einer Aufhängekonstruktion) wird im Punkt A durch eine Seilkraft $\vec{F} = -F\vec{e}_x - F\vec{e}_y - F\vec{e}_z$ belastet.

a) Diskutieren Sie die statische Bestimmtheit des Systems.

b) Schneiden Sie die Knoten A und B frei und stellen Sie die einwirkenden Stabkräfte als Vektoren dar.

c) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 bis S_6.

Gegeben: $a,\ b,\ c,\ F$.

2. Aufgabe

a) Es gilt:

$$a + s = 3k$$

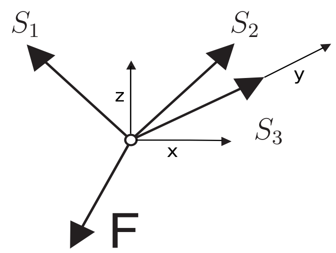
a = Auflager
s = Stäbe
k = Knoten

Mit $k = 7, s = 6$ und $a = 3 \cdot 5$ folgt:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 + 6 = 21 = 3 \cdot 7 \quad &\rightarrow \quad \textit{hinreichend bestimmt} \\ \textit{nicht kinematisch gelagert} \quad &\rightarrow \quad \textit{notwendig bestimmt} \end{aligned}$$

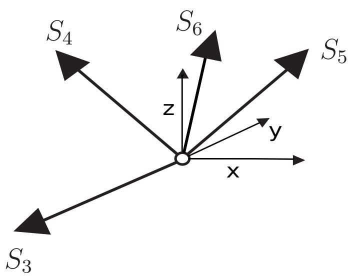
$\Rightarrow$ *Innerlich und äußerlich bestimmt*

b) **Knoten A**:



$$\begin{aligned}
\underline{S}_1 = |S_1|\underline{e}_1 &= S_1 \frac{1}{|-a\underline{e}_x + a\underline{e}_z|}(-a\underline{e}_x + a\underline{e}_z) \\
&= S_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_x + \underline{e}_z) \\
\underline{S}_2 = |S_2|\underline{e}_2 &= S_2 \frac{1}{|a\underline{e}_x + a\underline{e}_z|}(a\underline{e}_x + a\underline{e}_z) \\
&= S_2 \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_z) \\
\underline{S}_3 = |S_3|\underline{e}_3 &= S_3 \frac{1}{|c\underline{e}_y|} c\underline{e}_y \\
&= S_3 \underline{e}_y \\
\underline{F} &= F(-\underline{e}_x - \underline{e}_y - \underline{e}_z)
\end{aligned}$$

Knoten B:



$$
\begin{aligned}
\underline{S}_3 = |S_3|\underline{e}_3 &= S_3 \frac{1}{|-c\underline{e}_y|} - c\underline{e}_y \\
&= -S_3 \underline{e}_y \\
\underline{S}_4 = |S_4|\underline{e}_4 &= S_4 \frac{1}{|-a\underline{e}_x + a\underline{e}_z|}(-a\underline{e}_x + a\underline{e}_z) \\
&= S_4 \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{e}_x + \underline{e}_z) \\
\underline{S}_5 = |S_5|\underline{e}_5 &= S_5 \frac{1}{|a\underline{e}_x + a\underline{e}_z|}(a\underline{e}_x + a\underline{e}_z) \\
&= S_5 \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_z) \\
\underline{S}_6 = |S_6|\underline{e}_6 &= S_6 \frac{1}{|b\underline{e}_y + a\underline{e}_z|}(b\underline{e}_y + a\underline{e}_z) \\
&= S_6 \frac{b\underline{e}_y + a\underline{e}_z}{\sqrt{b^2 + a^2}}
\end{aligned}
$$

c) Gleichgewicht in Knoten A:

$$
\begin{bmatrix}
-\frac{S_1}{\sqrt{2}} & +\frac{S_2}{\sqrt{2}} & +0 & -F \\
0 & +0 & +S_3 & -F \\
\frac{S_1}{\sqrt{2}} & +\frac{S_2}{\sqrt{2}} & +0 & -F
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

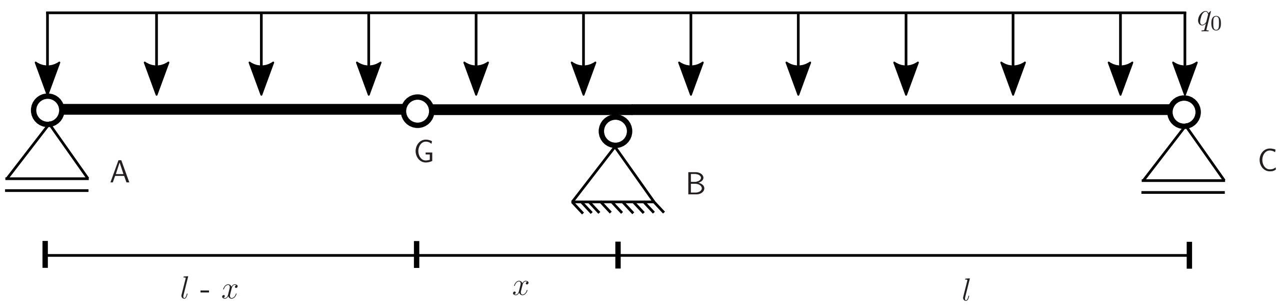
Gleichgewicht in Knoten B:

$$
\begin{bmatrix}
0 & -\frac{S_4}{\sqrt{2}} & +\frac{S_5}{\sqrt{2}} & +0 \\
-S_3 & +0 & +0 & +S_6 \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}} \\
0 & +\frac{S_4}{\sqrt{2}} & +\frac{S_5}{\sqrt{2}} & +S_6 \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Auflösen liefert:

$$
S_1, = 0 \qquad S_2 = \sqrt{2}F, \qquad S_3 = F,
$$
$$
S_4 = S_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} F \frac{a}{b}, \qquad S_6 = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b} F
$$

3. Aufgabe (ca. 27.5 % der Gesamtpunktzahl)



Der dargestellte Gerberträger wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet.

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen sowie die Gelenkkräfte in Abhängigkeit der Abmessung x.

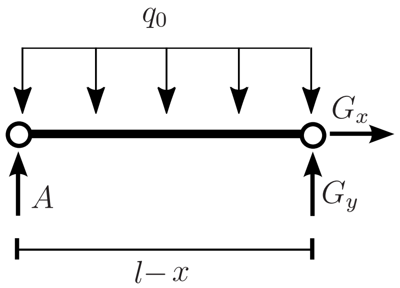
b) Bestimmen Sie die Abmessung x so, dass das maximale Feldmoment $M_{\text{Feld,max}}$ im Balken $\overline{\mathsf{AG}}$ betragsmäßig so groß ist wie das Stützmoment $M_{\text{Stütz}}$ über Lager B .

c) Skizzieren Sie für diesen Fall qualitativ den Momentenverlauf über den gesamten Träger.

Gegeben: l, q_0.

3. Aufgabe

a) Teilkörper I:



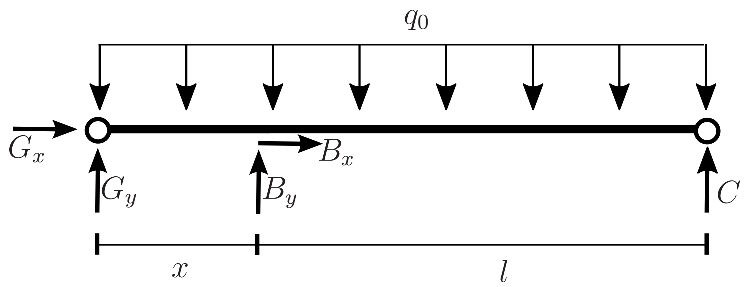
Für die Gleichgewichtsbedingungen gilt:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad \rightarrow \quad G_x = 0$$

$$\sum M^G = 0: \quad \rightarrow \quad -A(l-x) + q_0\frac{(l-x)^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow A = q_0\frac{l-x}{2}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad \rightarrow \quad A + G_y - q_0(l-x) = 0 \quad \Rightarrow G_y = q_0\frac{l-x}{2}$$

Teilkörper II:



Für die Gleichgewichtsbedingungen gilt:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad \rightarrow \quad B_x = 0$$

$$\sum M^B = 0: \quad \rightarrow \quad -q_0\frac{l^2}{2} + q_0\frac{x^2}{2} + C \cdot l + G_y \cdot x = 0 \quad \Rightarrow C = q_0\frac{l-x}{2}$$

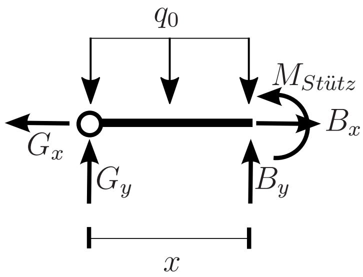
$$\sum F_{iy} = 0: \quad \rightarrow \quad -q_0 l - q_0 x - G_y + C + B_y = 0 \quad \Rightarrow B_y = q_0 l + q_0 x$$

b) Es gilt:

$$M_{Feld} = q_0 \frac{(l-x)^2}{2}$$

gefordert ist: $|M_{Feld}| = |M_{Stütz}|$

Ermitteln des Stützmomentes über $\sum M^B = 0$



$$M_{Stütz} + q_0 \frac{x^2}{2} + G_y x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad M_{Stütz} = -\frac{q_0 l x}{2}$$

$|M_{Feld}| = |M_{Stütz}|$ liefert

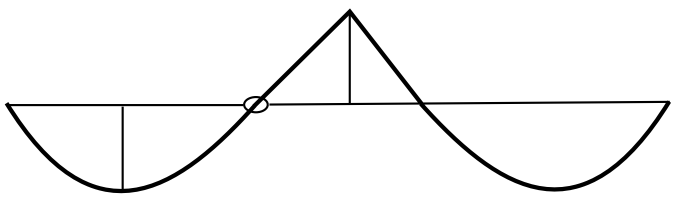
$$\begin{aligned} q_0 \frac{(l-x)^2}{2} &= \frac{q_0 l x}{2} \\ q_0 \left(\frac{l^2}{8} - \frac{lx}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{lx}{2}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad x^2 - 6lx + l^2 &= 0 \end{aligned}$$

Auflösen ergibt

$$x_1 \approx 5,83l \qquad\qquad x_2 \approx 0,1716l$$

Lösung: $x \approx 0,1716l$

c) Momentenverlauf



4. Aufgabe (ca. 17.5 % der Gesamtpunktzahl)

Teilaufgabe 4.1:

Beim Felsklettern können zur Sicherung von Personen sogenannte „Klemmgeräte“ verwendet werden. Diese Geräte eignen sich besonders gut zur Verwendung in Felsspalten. Die Klemmwirkung beruht auf der Haftung zwischen dem Klemmgerät und dem Fels. In Abb. 1 ist ein solches Klemmgerät abgebildet. Es kann zu dem in Abb. 2 dargestellten System vereinfacht werden. Dabei sind zwei Stäbe gleicher Länge durch ein Gelenk verbunden, an dem die Last F angreift. Die Felswände seien unverschieblich, starr und rau.

Abb. 1

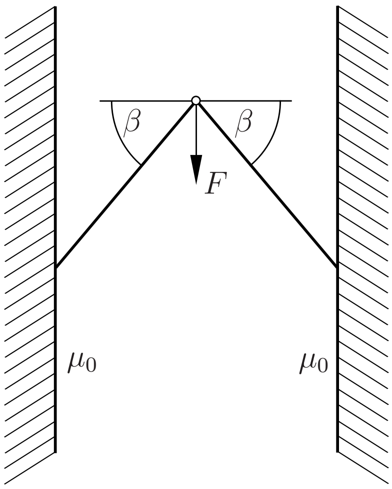


Abb. 2

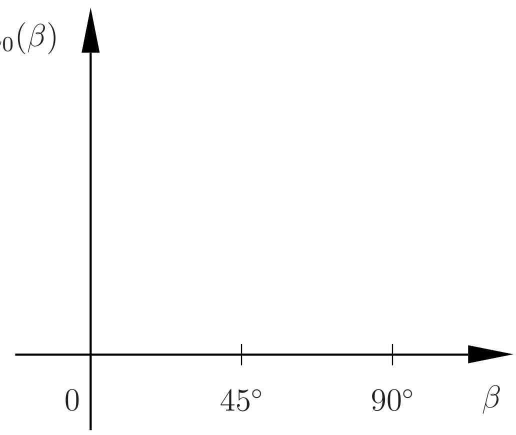


Abb. 3

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

a) Berechnen Sie die Kräfte, die auf die Felswände wirken in Abhängigkeit von F und β.

b) Bestimmen Sie den zum Haften benötigten Haftkoeffizient μ_0 in Abhängigkeit von β.

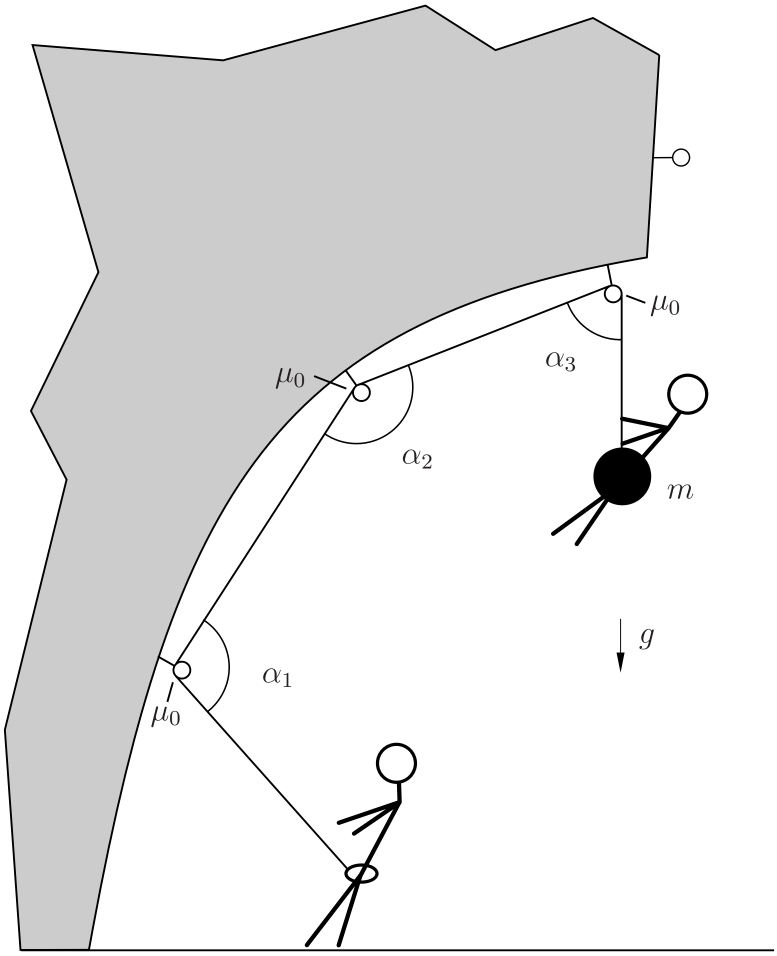
c) Stellen Sie den Bereich, in dem Haften möglich ist, im gegebenen Diagramm (Abb. 3) qualitativ dar.

Gegeben: F, β.

Teilaufgabe 4.2:

Beim Klettern an einem überhängenden Felsen stürzt ein Kletterer der Masse m und hängt danach statisch im Seil. Das undehnbare Seil wird dabei an drei feststehenden Rollen umgelenkt und durch den Sichernden gehalten. Zwischen den feststehenden Umlenkrollen und dem Seil herrscht Haftreibung mit Haftkoeffizient μ_0.

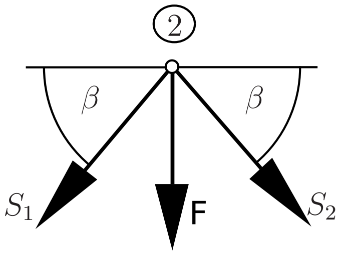
Wie groß ist die Seilkraft, die auf den Sichernden wirkt?



Gegeben: $\alpha_1 = 105°,\ \alpha_2 = 145°,\ \alpha_3 = 70°,\ \mu_0 = 0.1,\ m = 100kg,\ g = 9.81\frac{m}{s^2}$.

4. Aufgabe
Teilaufgabe 4.1

a) Freischnitt Knoten 2:

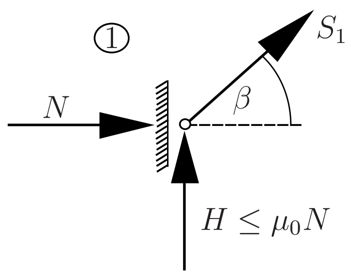


$$\sum F_x = 0: \quad \rightarrow \quad -S_1 cos(\beta) + S_2 cos(\beta) = 0$$
$$\sum F_x = 0: \quad \rightarrow \quad -S_1 sin(\beta) - S_2 sin(\beta) - F = 0$$

Daraus folgt:

$$\sum F_x = 0: \quad \rightarrow \quad S_1 = S_2$$
$$\sum F_y = 0: \quad \rightarrow \quad S_1 = -\frac{F}{2sin(\beta)}$$

b) Aufgrund der Symmetrie genügt der Freischnitt von Knoten 1:



$$\sum F_x = 0: \quad \rightarrow \quad N + S_1 cos(\beta) = 0$$
$$\sum F_x = 0: \quad \rightarrow \quad H + S_1 sin(\beta) = 0$$

Daraus folgt:

$$\sum F_x = 0: \quad \rightarrow \quad N = S_1 cos(\beta) = \frac{F}{2}\frac{cos(\beta)}{sin(\beta)} = \frac{F}{2tan(\beta)}$$
$$\sum F_y = 0: \quad \rightarrow \quad H = -S_1 sin(\beta) = \frac{F}{2}$$

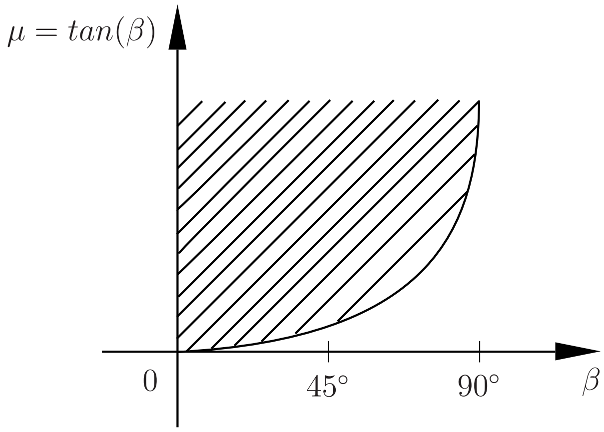
Über die Haftbedingung

$$H \leq \mu_0 N$$

ergibt sich

$$\mu_0 \geq \frac{H}{N} = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{F}{2tan(\beta)}} = tan(\beta)$$

c) Haftbereich:



Teilaufgabe 4.1
Berechnen des Umschlingungswinkels:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 = 105° & \rightarrow & \beta_1 = 360° - 2 \cdot 90° - \alpha_1 = 75° \\ \alpha_2 = 145° & \rightarrow & \beta_1 = 360° - 2 \cdot 90° - \alpha_2 = 35° \\ \alpha_3 = 70° & \rightarrow & \beta_1 = 360° - 2 \cdot 90° - \alpha_3 = 110° \end{array}$$

$\Rightarrow \sum \beta_i = 220°$

Umrechnen in $[rad]$

$$220° = 220° \frac{2\pi}{360°} = 3,8397\ [rad]$$

Einsetzen in die Formel nach Euler-Eytelwein

$$S_a = S_b e^{-\mu_0 \beta}$$

liefert

$$\begin{aligned} S_a &= m \cdot g \cdot e^{-\mu_0 \sum \beta_i} \\ &= 100kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot e^{-0,1 \cdot 3,8397} \\ &= 668,21 \frac{kg \cdot m}{s^2} \\ &= 668,21N \end{aligned}$$