Modulprüfung

Festigkeitslehre

15. März 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

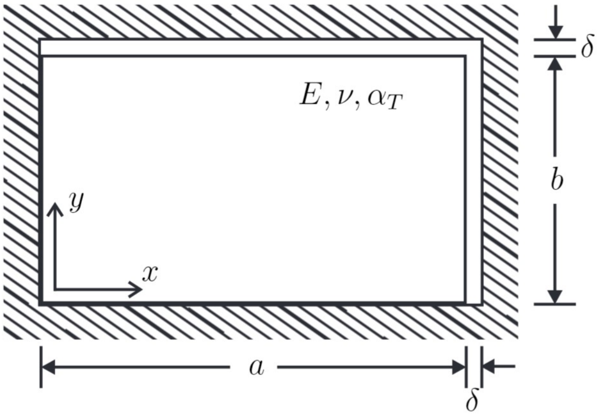
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

Eine Rechteckscheibe ($a > b$) wird in einen etwas größeren starren Ausschnitt eingesetzt, sodass Spalten der Breite δ vorhanden sind. Anschließend wird die Scheibe erwärmt. Es sei angenommen, dass die Scheibe an allen Rändern reibungsfrei gleiten kann und ein ebener Spannungszustand vorliegt.



a) Welche Temperaturerhöhung ΔT_a ist erforderlich, damit der rechte Spalt gerade geschlossen wird?

b) Bei welcher Temperaturerhöhung ΔT_b schließt sich auch der obere Spalt? Wie groß ist dann σ_x?

c) Welche Spannungen herrschen in der Scheibe für $\Delta T > \Delta T_b$?

Gegeben: $a,\ b,\ \delta,\ E,\ \nu,\ \alpha_T$

Musterlösung - Aufgabe 1

Elastizitätsgesetz: (Ebener Spannungszustand!)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + \alpha_T \Delta\ T$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) + \alpha_T \Delta\ T$$

a) Der rechte Spalt wird gerade geschlossen, wenn gilt

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{a}\ .$$

Da sich die Scheibe reibungsfrei ausdehnt, gilt $\underbrace{\sigma_x = \sigma_y = 0}$. Mit dem Elastizitätsgesetz folgt

$$\varepsilon_x = \alpha_T\ \Delta T_a \ \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{a}$$
$$\Rightarrow\ \Delta\ T_a = \underline{\underline{\frac{\delta}{\alpha_T\ a}}}\ .$$

b) Der obere Spalt schließt sich bei einer Dehnung von $\varepsilon_y = \frac{\delta}{b}$. Des Weiteren gilt $\sigma_y = 0$ und $\varepsilon_x = \frac{\delta}{a}$. Mit dem Elastizitätsgesetz folgt

$$\text{I.}\quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_x\right) + \alpha_T\ \Delta T_b \ \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{b}$$
$$\text{II.}\quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x + \alpha_T\ \Delta T_b \ \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{a}$$

$$\stackrel{\text{I.}}{\Rightarrow}\quad \sigma_x = \left(\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T_b\right) E$$
$$\stackrel{\text{II.}}{\Rightarrow}\quad -\nu\left(\frac{\delta}{a} - \alpha_T\Delta T_b\right) + \alpha_T \Delta T_b = \frac{\delta}{b}$$

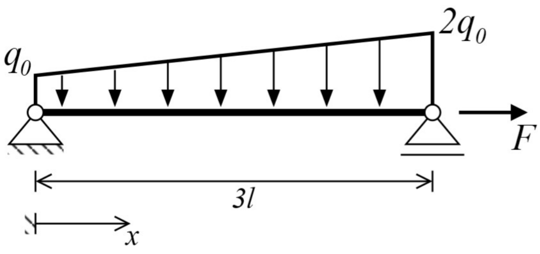
$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\Delta T_b = \frac{\delta}{\alpha_T}\frac{(a+\nu b)}{ab\,(1+\nu)}}}$$
$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sigma_x = \frac{\delta\,(b-a)}{ab\,(1+\nu)}E}}$$

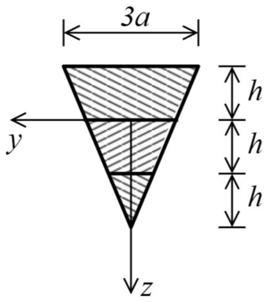
c) Beide Spalte sind geschlossen, sodass gilt $\varepsilon_x = \frac{\delta}{a}$, $\varepsilon_y = \frac{\delta}{b}$.

$$\sigma_x = E\left[\varepsilon_x - \alpha_T\Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_y\right]\ \Rightarrow \sigma_x = E\left[\frac{\delta}{a} - \alpha_T\Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_y\right]$$
$$\sigma_y = E\left[\varepsilon_y - \alpha_T\Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_x\right]\ \Rightarrow \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\frac{\delta}{b} + \nu\frac{\delta}{a} - \alpha_T\Delta T\,(1+\nu)\right]$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sigma_y = E\left[\delta\left(\frac{a+\nu b}{ab\,(1-\nu^2)}\right) - \frac{\alpha_T\Delta T}{(1-\nu)}\right]}}$$
$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sigma_x = E\left[\delta\left(\frac{b+\nu a}{ab\,(1-\nu^2)}\right) - \frac{\alpha_T\Delta T}{(1-\nu)}\right]}}$$

2. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)





Der Querschnitt (Höhe $3h$) des oben dargestellten Einfeldsträgers besteht aus drei zusammengeleimten Balken der Höhe h. Für die skizzierte Belastung sind die gegebenen Schnittgrößenverläufe zu verwenden:

$$N = F, \quad M_y(x) = q_0 l \left(2x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l} - \frac{1}{18}\frac{x^3}{l^2}\right), \quad Q_z(x) = q_0 l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{1}{6}\frac{x^2}{l^2}\right)$$

Ermitteln Sie an der Stelle $x = 2l$

a) die Schubspannungen in den Fugen bei $z = 0$ und $z = h$,

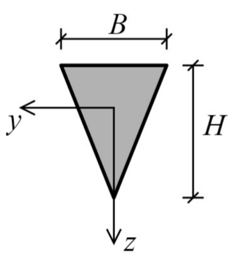
b) die erforderliche Balkenhöhe h, sodass $|\tau_{xz}| \leq \frac{1}{5}\frac{q_0 l}{a^2}$ gilt.

Im Folgenden ist $h = a$ anzunehmen.

c) Geben Sie an wie groß die Zugkraft F sein muss, damit an der Stelle $x = 2l$ der gesamte Querschnitt auf Zug ($\sigma > 0$) belastet ist.

Gegeben: $a,\ l,\ q_0$

Hinweis:



$$I_y = \frac{BH^3}{36}$$

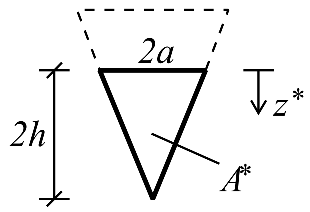
Musterlösung - Aufgabe 2

a) Berechnung der Schubspannung in der oberen und unteren Fuge:

$$I_y = \frac{3a\,(3h)^3}{36} = \frac{9}{4}ah^3 \qquad \text{FTM konstant über die Länge}$$

$$Q_z(x=2l) = ... = -\frac{2}{3}q_0 l \qquad \text{Querkraft an der Stelle } x = 2l$$

Obere Fuge $z = 0$:

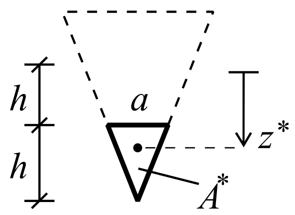


$$b(z=0) = 2a$$

$$S_y(z=0) = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2h}_{z^*}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2h}_{A^*} = \frac{4}{3}ah^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_{xz}^{oben}}} = \frac{Q_z(x)\,S_y(z)}{I_y\;b(z)} = \frac{-\frac{2}{3}q_0 l\cdot\frac{4}{3}ah^2}{\frac{9}{4}ah^3\cdot 2a} = \underline{\underline{-\frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah}}}$$

Untere Fuge $z = h$:



$$b(z=h) = a$$

$$S_y(z=h) = \underbrace{(h+\frac{1}{3}\cdot h)}_{z^*}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h}_{A^*} = \frac{2}{3}ah^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_{xz}^{unten}}} = \frac{Q_z(x)\,S_y(z)}{I_y\;b(z)} = \frac{-\frac{2}{3}q_0 l\cdot\frac{2}{3}ah^2}{\frac{9}{4}ah^3\cdot a} = \underline{\underline{-\frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah}}}$$

b) Bemessung der Balkenhöhe h

$$|\tau_{xz}^{oben}| = |\tau_{xz}^{unten}| = \frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah} \overset{!}{\leq} \frac{1}{5}\frac{q_0 l}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h}} \geq \frac{16}{81} \cdot \frac{5}{1} \cdot a = \frac{80}{81} a \underline{\underline{\approx a}}$$

c) Normalspannung infolge gerader Biegung und Normalkraft soll an der Stelle $x = 2l$ für alle z größer 0 sein. Das gilt, wenn

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y(x = 2l)}{I_y} \cdot z \overset{!}{\geq} 0$$

Im Bereich $0 \leq z \leq +2a$ ist $\sigma > 0$, da

$$N = F \qquad > 0$$

$$M_y(x = 2l) = q_0 l \left(2 \cdot 2\,l - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,l^2}{l} - \frac{1}{18} \cdot \frac{8\,l^3}{l^2}\right) = \frac{14}{9} q_0 l^2 \qquad > 0$$

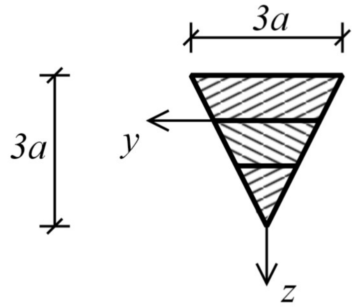
Im Bereich $-a \leq z < 0$ ist $\sigma > 0$, wenn an der Querschnittoberkante gilt

$$\sigma(z = -a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{F}{A} + \frac{M_y(x = 2l)}{I_y} \cdot (-a) \overset{!}{\geq} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad F \geq M_y(x = 2l) \cdot \frac{A}{I_y} \cdot a$$

Für den Querschnitt gilt

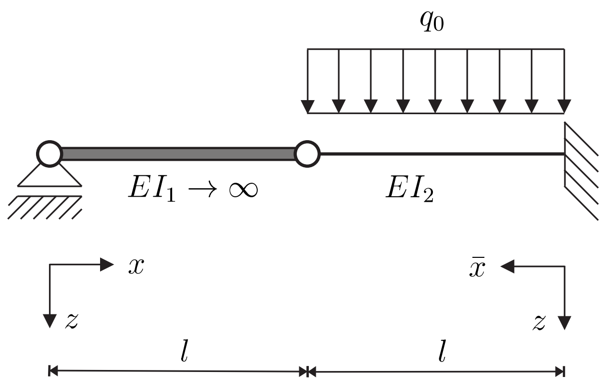


$$A = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a = \frac{9}{2} a^2$$

$$I_y = \frac{9}{4} a^4 \qquad \text{aus a) mit } h = a$$

$$\Rightarrow \quad F \geq \frac{14}{9} q_0 l^2 \cdot \frac{\frac{9}{2} a^2}{\frac{9}{4} a^4} \cdot a = \frac{14}{9} q_0 l^2 \cdot \frac{2}{a} = \frac{28}{9} \frac{q_0 l^2}{a} \approx 3.1 \frac{q_0 l^2}{a}$$

3. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)

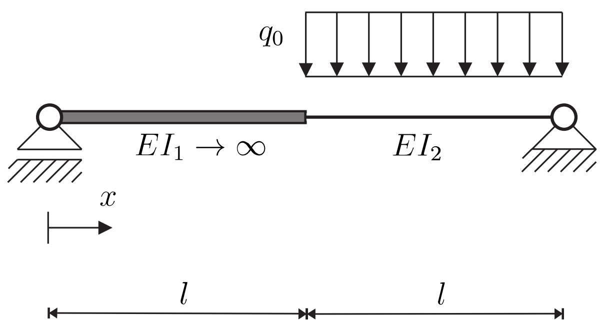


Ein aus zwei Balken mit den Biegesteifigkeiten $EI_1 \to \infty$ und EI_2 zusammengesetztes Tragwerk wird durch die Linienlast q_0 beansprucht.

a) Ermitteln Sie die Durchbiegung $w(x)$ bzw. $w(\bar{x})$ durch Integration der Biegelinie. Verwenden Sie hierfür die vorgegebenen Koordinatensysteme.

b) Skizzieren Sie qualitativ die Biegelinie des gesamten Balkens.

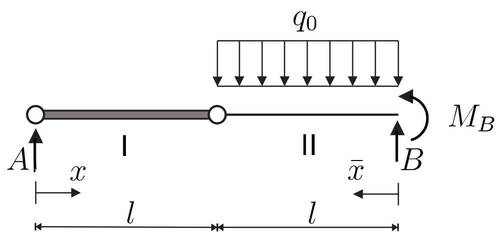
c) Das System wird durch konstruktive Maßnahmen wie unten dargestellt verändert. Geben Sie die Rand- und Übergangsbedingungen entsprechend der vorgegebenen Koordinate x an.



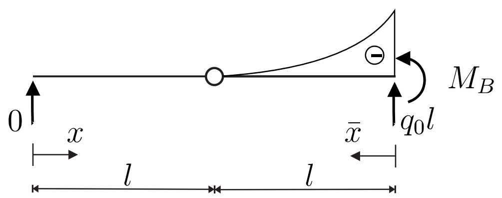
Gegeben: $l,\ q_0,\ EI_1 \to \infty,\ EI_2$

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Freischnitt:



Momentenverlauf Bereich II:



$$M(\bar{x}) = q_0 l\bar{x} - \frac{1}{2}q_0 l^2 - \frac{1}{2}q_0\bar{x}^2$$

DGL der Biegelinie:

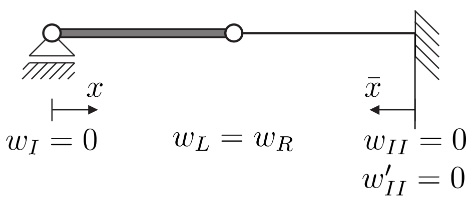
Bereich I:

$$w_I''(x) = 0$$
$$w_I'(x) = C_1$$
$$w_I(x) = C_1 x + C_2$$

Bereich II:

$$EI_2\, w_{II}''(\bar{x}) = -M(\bar{x}) = \frac{1}{2}q_0\bar{x}^2 - q_0 l\bar{x} + \frac{1}{2}q_0 l^2$$
$$EI_2\, w_{II}'(\bar{x}) = \frac{1}{6}q_0\bar{x}^3 - q_0\frac{1}{2}l\bar{x}^2 + q_0\frac{1}{2}q_0 l^2\bar{x} + C_3$$
$$EI_2\, w_{II}(\bar{x}) = \frac{1}{24}q_0\bar{x}^4 - \frac{1}{6}q_0 l\bar{x}^3 + \frac{1}{4}q_o l^2\bar{x}^2 + C_3\bar{x} + C_4$$

Randbedingungen:



$$w_I(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$
$$w_I(x=l) = w_{II}(\bar{x}=l)$$
$$w_{II}(\bar{x}=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$
$$w_{II}'(\bar{x}=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0$$

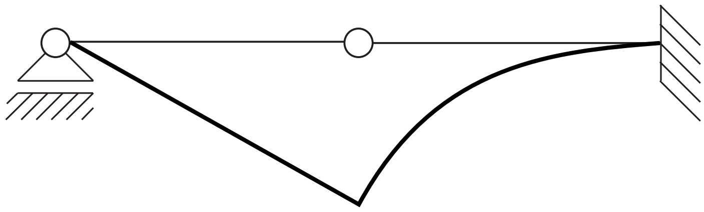
Aus $w_I(x=l) = w_{II}(\bar{x}=l)$ folgt

$$\begin{aligned} C_1 l &= \left(\frac{1}{24}q_0 l^4 - \frac{1}{6}q_0 l^4 + \frac{1}{4}q_o l^4\right)\frac{1}{EI_2} \\ &= \frac{q_0 l^3}{8EI_2} \end{aligned}$$

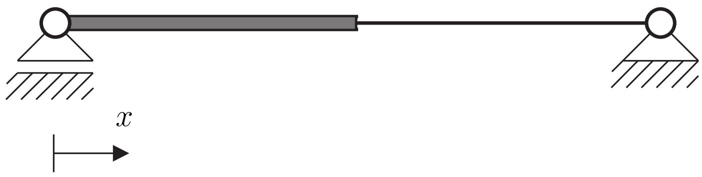
Ergebnis:

$$w_I(x) = \frac{q_0 l^3}{8EI_2}x$$
$$w_{II}(\bar{x}) = \frac{q_0}{2EI_2}\left(\frac{1}{12}\bar{x}^4 - \frac{1}{3}l\bar{x}^3 + \frac{1}{2}l^2\bar{x}^2\right)$$

b) Biegelinie:



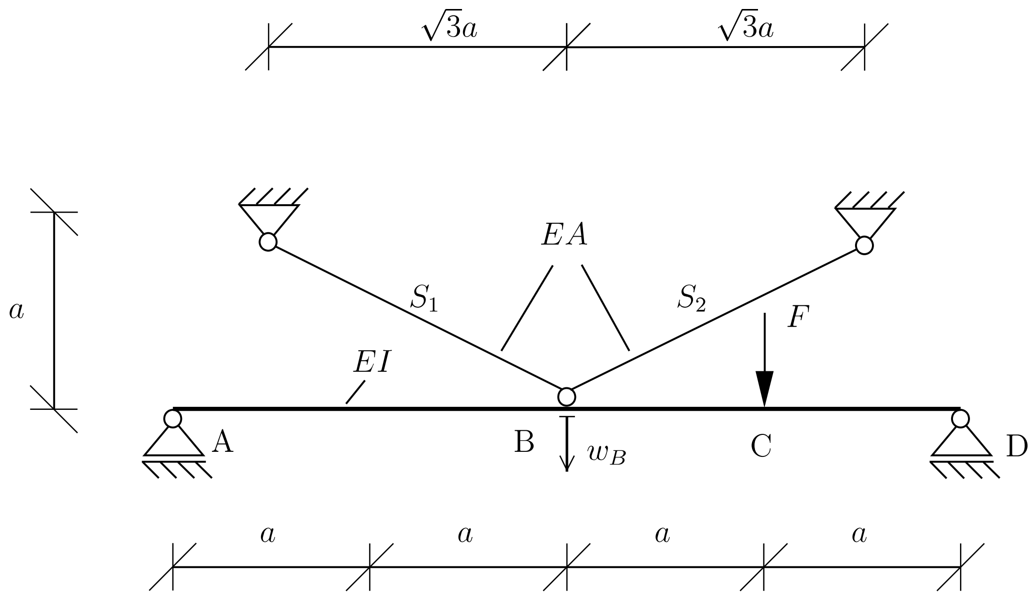
c) Rand- und Übergangsbedingungen bei geändertem System:



$w_I(x=0)=0 \qquad w_I(x=l)=w_{II}(x=l) \qquad w_{II}(x=2l)=0$

$w'_I(x=l)=w'_{II}(x=l)$

4. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Das oben dargestellte System besteht aus einem Balken und zwei Dehnstäben, welches im Punkt C durch eine Einzelkraft F belastet wird.

a) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2 unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte.

b) Ermitteln Sie die Absenkung w_B im Punkt B mit Hilfe der Stabverlängerung und des Verschiebungsplans.

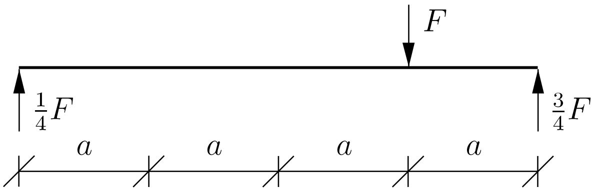
Gegeben: F, a, EI, EA

Musterlösung - Aufgabe 4

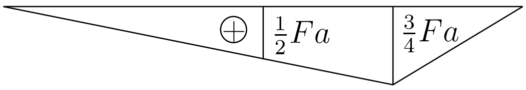
a)

<u>0-System: $S_2 = X = 0$</u>

System



M_0-Verlauf

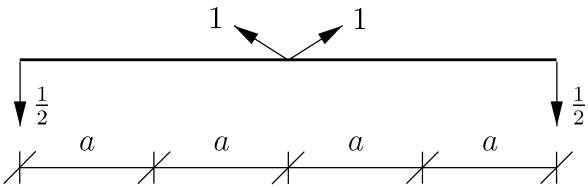


N_0-Verlauf

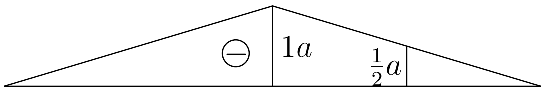
$N_1 = N_2 = 0$

<u>1-System: $S_2 = X = 1$</u>

System



M_1-Verlauf



N_1-Verlauf

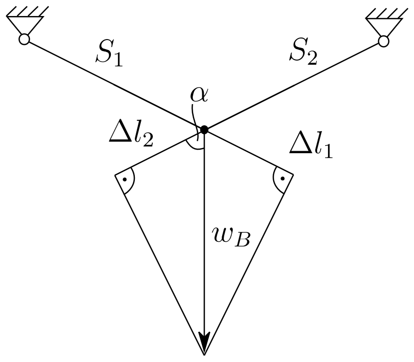
$N_1 = N_2 = 1$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{2}Fa \cdot a \cdot 2a - \left(\frac{1}{6}a\left(2\frac{1}{2}Fa + \frac{3}{4}Fa\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2}Fa + 2\frac{3}{4}Fa\right)\right)a - \frac{1}{3}\frac{3}{4}Fa\frac{1}{2}a\,a\right]$$
$$= -\frac{11}{12}\frac{Fa^3}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot(-a)(-a)\cdot 2a \cdot 2\right] + \frac{1}{EA}\left[1 \cdot 1 \cdot 2a \cdot 2\right]$$
$$= \frac{4}{3}\frac{a^3}{EI} + 4\frac{a}{EA}$$

$$X = S_2 = S_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{11F}{16 + 48\frac{EI}{a^2EA}}$$

b)



$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$$

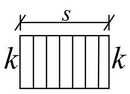
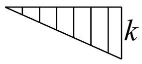
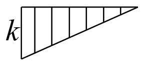
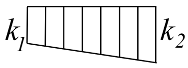
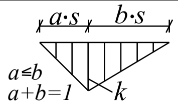
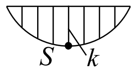
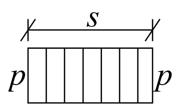
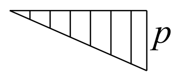
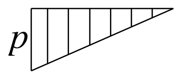
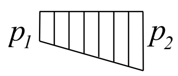
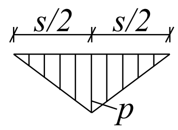
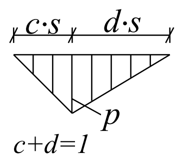
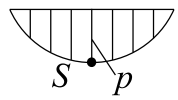
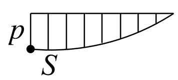
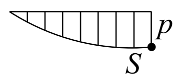
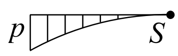
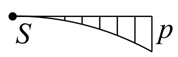
$$l_1 = l_2 = 2a$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{S_1 \cdot l_1}{EA}$$

$$w_B = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha)} = 2\frac{S_1 \cdot l_1}{EA} = \frac{11Fa}{4EA + 12\frac{EI}{a^2}}$$

Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x)\mathrm{dx}$

$K(x)$ / $P(x)$						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2)$ $+\frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+$ $p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+$ $k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \mathrel{\hat{=}}$ Scheitel einer quadratischen Parabel