Modulprüfung

Festigkeitslehre

24. August 2023

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

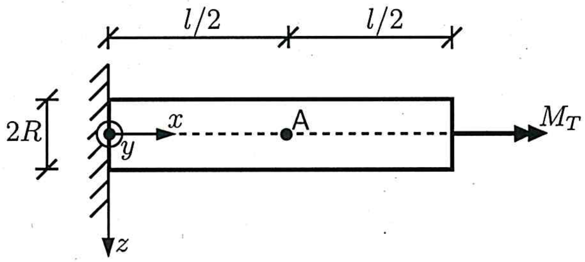
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

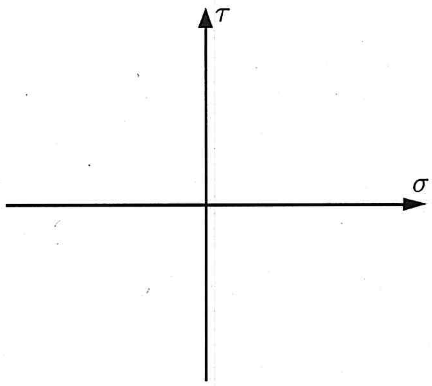
Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 10 % der Gesamtpunkte)

a) Ein Stab mit Vollkreisquerschnitt (Radius R, Länge l) sei durch ein Torsionsmoment M_T am Ende $x = l$ belastet.

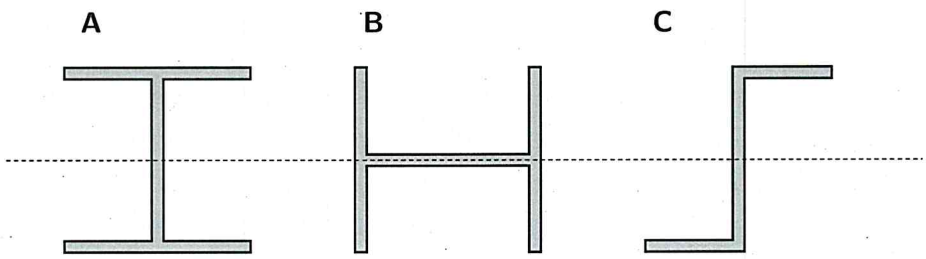




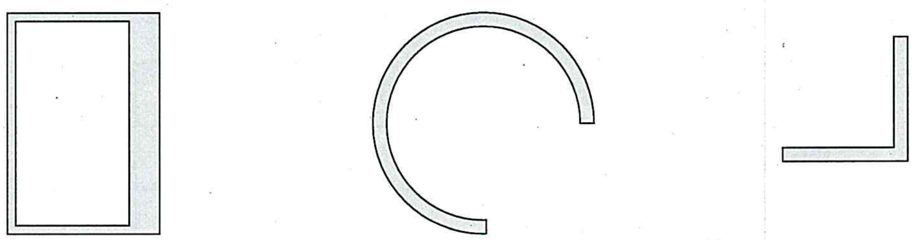
a1) Zeichnen Sie den zum Spannungszustand in Punkt A (Koordinaten: $x_A = l/2$, $y_A = R$, $z_A = 0$) gehörigen Mohr'schen Kreis.

a2) Zeichnen Sie **in der Skizze oben links** die Richtung der größten Hauptnormalspannung ein (mit Winkelangabe).

b) Ordnen Sie die gegebenen dünnwandigen Querschnitte **A**, **B**, **C** (konstante Wandstärke $t \ll h$) bezüglich des Flächenträgheitsmoments um die skizzierte horizontale Achse.

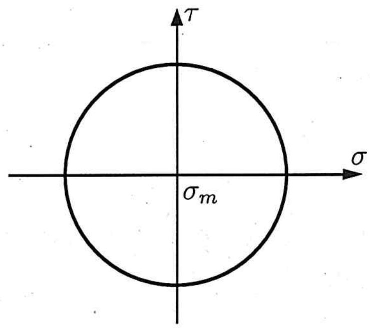


c) Skizzieren Sie qualitativ die Lage des Schubmittelpunktes für folgende Querschnitte:

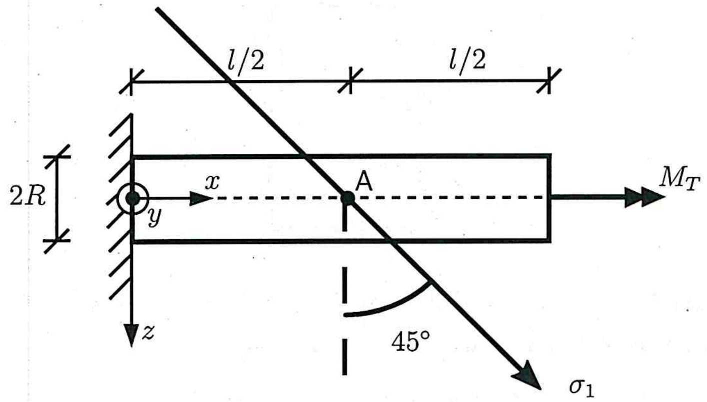


Musterlösung - Aufgabe 1

a1) Zum Spannungszustand gehöriger Mohr'scher Spannungskreis:

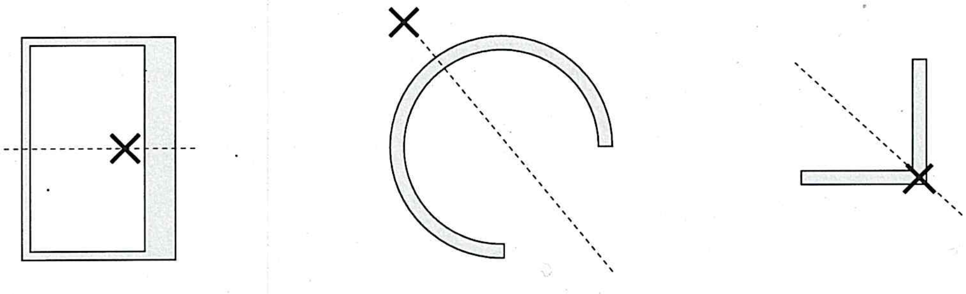


a2) Richtung der größten Hauptnormalspannung:



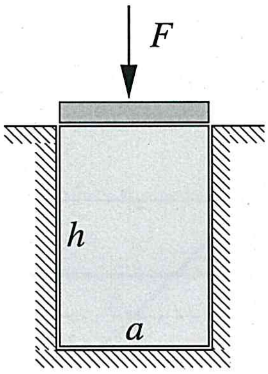
b) $I_A > I_C > I_B$

c)



2. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)

Ein Stahlquader mit quadratischer Grundfläche $a \times a$ und Höhe h passt im unbelasteten Zustand genau in einen Hohlraum mit starren Wänden.



Berechnen Sie die Änderung Δh der Höhe des linear thermo-elastischen Quaders, wenn dieser

a) nur durch eine Kraft F belastet wird (s. Skizze), oder

b) nur gleichförmig um die Temperatur ΔT erwärmt wird.

Es kann angenommen werden, dass die Kraft F gleichförmig über die Quaderoberseite verteilt wirkt und die Seitenflächen reibungsfrei gleiten können.

Gegeben: $F = 160\text{kN}$, $\Delta T = 100°\text{C}$, $E = 2.1 \cdot 10^5\text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $\alpha_T = 1.2 \cdot 10^{-5}/°\text{C}$, $a = 40\text{mm}$, $h = 60\text{mm}$.

Musterlösung – Aufg. 2

a) nur Kraft F (in z-Richtung $\hat{=}$ vertikal)

$$\Rightarrow \sigma_z = -\frac{F}{a^2}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

- in Hooke'sches Gesetz: (mit $\Delta T = 0$)

$$\varepsilon_x = 0 = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = 0 = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

- in $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)\frac{\sigma_z}{E}$$

$$= -\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)\frac{F}{E a^2}$$

- Höhenänderung:

$$\frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_z$$

Zahlenwerte

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta h}} = -\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)\frac{F h}{E a^2} \;\hat{=}\; \underline{\underline{-0{,}002\,\mathrm{mm}}}$$

b) nur Temp.-änderung ΔT

$$\sigma_z = 0 \quad , \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha_T \Delta T$$

$$\varepsilon_y = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha_T \Delta T$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = -\frac{\alpha_T \Delta T E}{1-\nu}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) + \alpha_T \Delta T$$

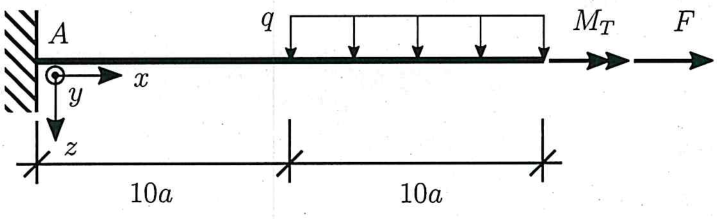
$$\Rightarrow \varepsilon_z = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \Delta T$$

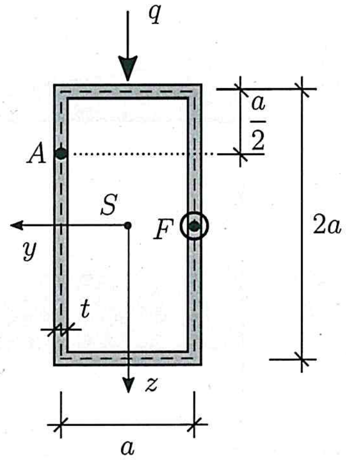
Höhenänderung $\Delta h = h\,\varepsilon_z$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta h}} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \Delta T h$$

$$\underline{\underline{\hat{=} 0{,}1337\,\text{mm}}}$$

3. Aufgabe: (ca. 34 % der Gesamtpunkte)





Der dargestellte Kragarm der Länge $20a$ hat den rechts dargestellten rechteckigen Hohlquerschnitt mit Wandstärke t und Schubmodul G. Das System wird durch ein Torsionsmoment M_T, eine Einzellast F und eine Streckenlast q wie dargestellt belastet.

a) Skizzieren Sie unter Angabe der maßgebenden Ordinaten alle Schnittgrößenverläufe, die im System auftreten bezüglich des gegebenen Koordinatensystems.

b) Berechnen Sie alle Spannungen, die im Punkt A (Koordinaten $x = 0, y = a/2, z = -a/2$) auftreten, und stellen Sie den Spannungszustand an einem geeigneten infinitesimalen Flächenelement in der x, z-Ebene dar.

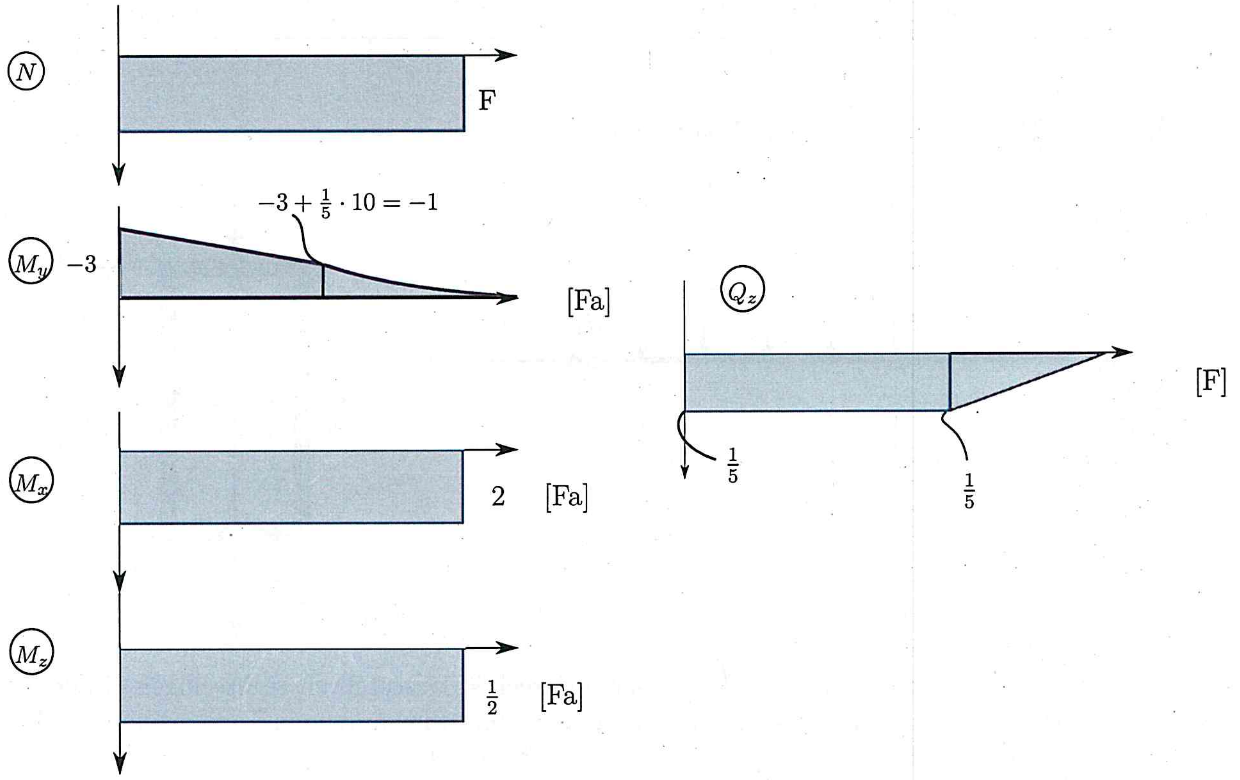
c) Stellen Sie diesen Spannungszustand als Mohrschen Spannungskreis dar.

Gegeben: F, a, G, sowie $t = a/10$, $M_T = 2Fa$, $q = \dfrac{F}{50a}$

Hinweis: Eine Verwölbung des Querschnitts ist nicht verhindert. Es darf ein dünnwandiger Querschnitt angenommen werden.

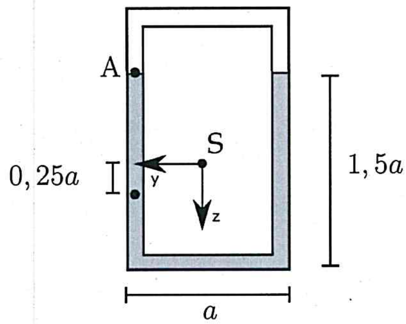
Musterlösung - Aufgabe 3

a)



b)

- Querschnittskennwerte:



$$A = 0,6a^2$$

$$I_y = 2 \cdot [\underbrace{\frac{at^3}{2}}_{\approx 0} + at \cdot a^2 + \frac{t(2a)^3}{12}] = \frac{1}{3}a^4$$

$$I_z = 2 \cdot [\underbrace{\frac{2a \cdot t^3}{2}}_{\approx 0} + \frac{a^3 t}{12} + 2at \cdot \frac{a}{2}^2] = \frac{7}{60}a^4$$

$$W_T = 2 \cdot (a \cdot 2 \cdot a)t = 0,4a^3$$

$$S_y = a \cdot t \cdot a + 2(1,5a \cdot t)0,25a = \frac{7}{40}a^3$$

- Normalspannung:

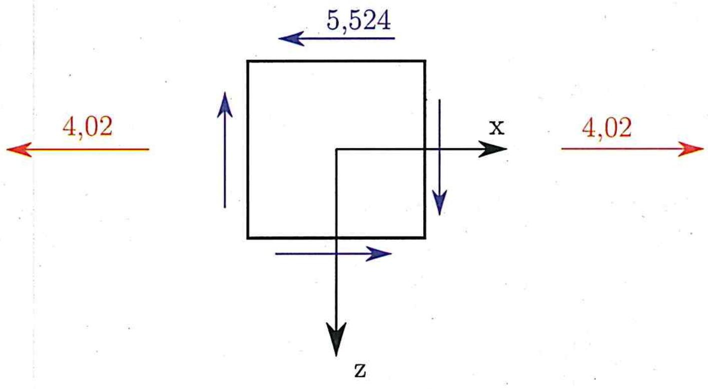
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = \frac{F}{0,6a^2} + -\frac{3Fa}{\frac{1}{3}a^4} \cdot (-\frac{a}{2}) - \frac{\frac{1}{2}Fa}{\frac{7}{60}a^4}\frac{a}{2} = 4,02\frac{F}{a^2}$$

- Schubspannung:

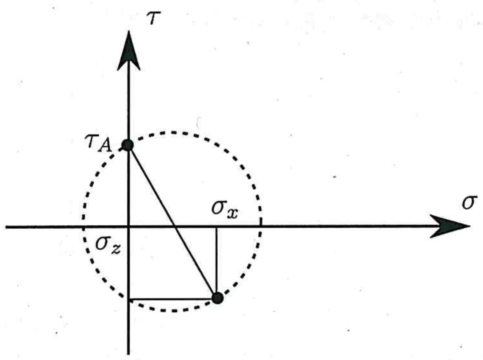
$$\tau_A^Q = \frac{QS_y}{I_y b} - \frac{M_x}{W_t} = \frac{\frac{1}{5}F \cdot \frac{7}{40}a^3}{\frac{1}{3}a^4 \cdot (\frac{2}{10}a)} = 0,524\frac{F}{a^2} \qquad \tau_A^{M_T} = \frac{2Fa}{0,4a^3} = 5\frac{F}{a^2}$$

$$\Rightarrow \tau_A = 5,524\frac{F}{a^2}$$

Darstellung $[F/a^2]$

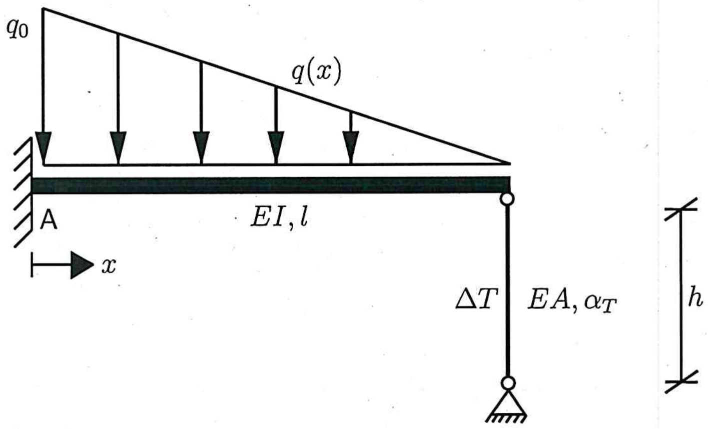


c)



Institut für Mechanik	Modulprüfung
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Festigkeitslehre
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	24. August 2023

4. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Ein an der Stelle A eingespannter Balken der Länge l sei zusätzlich durch einen thermoelastischen Stab gestützt und durch eine linear veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet. Die unbelastete Länge des Stabes sei h .

Wie groß muss eine gleichförmige Temperaturänderung ΔT des Stabes sein, damit das Einspannmoment (Stelle A) verschwindet?

Gegeben: q_0, EI, EA, l, h, α_T .

<u>Hinweis:</u>

Die Aufgabe ist durch Integration der Differentialgleichung für die Biegelinie des Balkens zu bearbeiten.

4. Aufgabe:

- **Biege-DGL:**

$$
\begin{aligned}
EIw^{IV} &= -\frac{q_0}{l}x + q_0 \\
EIw''' &= -\frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x^2 + q_0 x + C_1 = -Q \\
EIw'' &= -\frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3 + \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_2 = -M \\
EIw' &= -\frac{1}{24}\frac{q_0}{l}x^4 + \frac{1}{6}q_0 x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw &= -\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5 + \frac{1}{24}q_0 x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

- **Randbedingungen:**

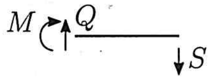
(1) $w(x=0) = 0$ $\rightarrow\ C_4 = 0$

(2) $w'(x=0) = 0$ $\rightarrow\ C_3 = 0$

(3) $M(x=0) = 0$ (aus Aufgabenstellung) $\rightarrow\ C_2 = 0$

(4) $M(x=l) = 0$ $\rightarrow\ C_1 = -\frac{1}{3}q_0 l$

(5) $Q(x=l) = S = -EIw'''$



$$
\Rightarrow \quad EIw(x) = -\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5 + \frac{1}{24}q_0 x^4 - \frac{1}{18}q_0 l x^3
$$

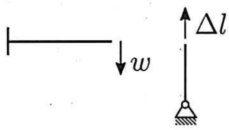
- **Durchbiegung bei $x = l$ und Stabkraft:**

$$
w(l) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}l^5 + \frac{1}{24}q_0 l^4 - \frac{1}{18}q_0 l^4\right] = -\frac{1}{45}\frac{q_0 l^4}{EI}
$$

$$
S = Q(x=l) = -EIw''' = -\left[-\frac{1}{2}\frac{q_0}{l}l^2 + q_0 l - \frac{1}{3}q_0 l\right] = -\frac{1}{6}q_0 l \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Druckkraft}\\ \text{in Stütze}\end{array}\right)
$$

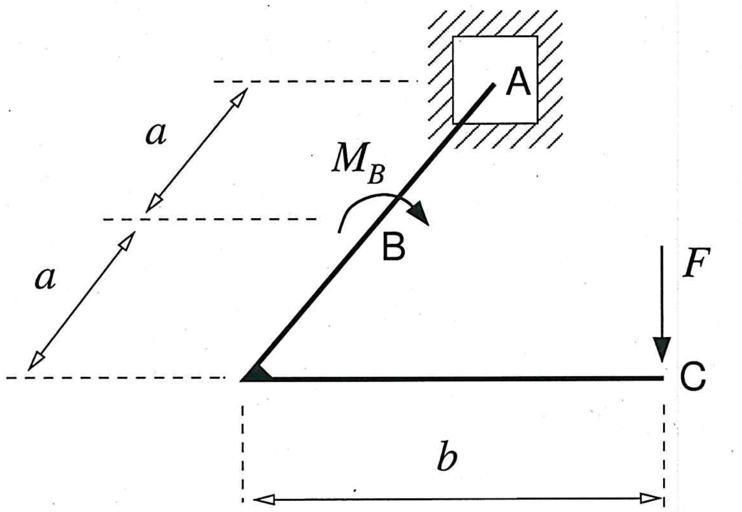
- **Kompatibilität**

$$
-w(l) \stackrel{!}{=} \Delta l_s
$$



$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad \Delta l_s &= \frac{S\,h}{EA} + \alpha_T\,\Delta T\,h \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{45}\frac{q_0 l^4}{EI} &= -\frac{1}{6}\frac{q_0 l h}{EA} + \alpha_T\,\Delta T\,h \\
\rightarrow \quad \Delta T &= \left[\frac{1}{45}\frac{q_0\,l^4}{EI} + \frac{1}{6}\frac{q_0\,l\,h}{EA}\right]\frac{1}{\alpha_T\,h}
\end{aligned}
$$

5. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Der im Punkt A eingespannte Rahmen wird wie skizziert im Punkt B durch ein Einzelmoment M_B und im Punkt C durch eine Einzelkraft F belastet.

Berechnen Sie mit Hilfe des *Arbeitssatzes*, wie groß die Kraft F sein muss, damit es im Punkt C zu keiner Vertikalverschiebung kommt.

Für den gesamten Rahmen seien die Biegesteifigkeit EI und die Torsionssteifigkeit GI_T konstant.

Musterlösung - Aufg. 5

- Absenkung in Pkt C infolge M_B:

$$v^{(1)} = \frac{M_B a b}{G I_T}$$

- Absenkung in C infolge F mittels Arbeitssatz:

lin. Mom.-verlauf

$$v^{(2)} = \frac{1}{F}\Bigg[\underbrace{\int_0^{2a} \frac{(Fx)^2}{EI}\,dx}_{\text{Biegung}} + \underbrace{\int_0^{b} \frac{(Fx)^2}{EI}\,dx}_{\text{Biegung}} + \underbrace{\frac{(Fb)^2}{G I_T}\,2a}_{\text{Torsion}}\Bigg]$$

- Verträglichkeit:

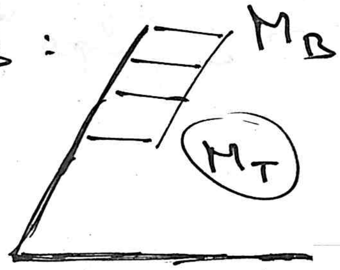
$$v^{(1)} + v^{(2)} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{M_B a b}{G I_T} + \frac{1}{F}\left[\frac{F^2}{EI}\left(\frac{8}{3}a^3 + \frac{b^3}{3}\right) + \frac{F^2}{G I_T}\,2ab\right] = 0$$

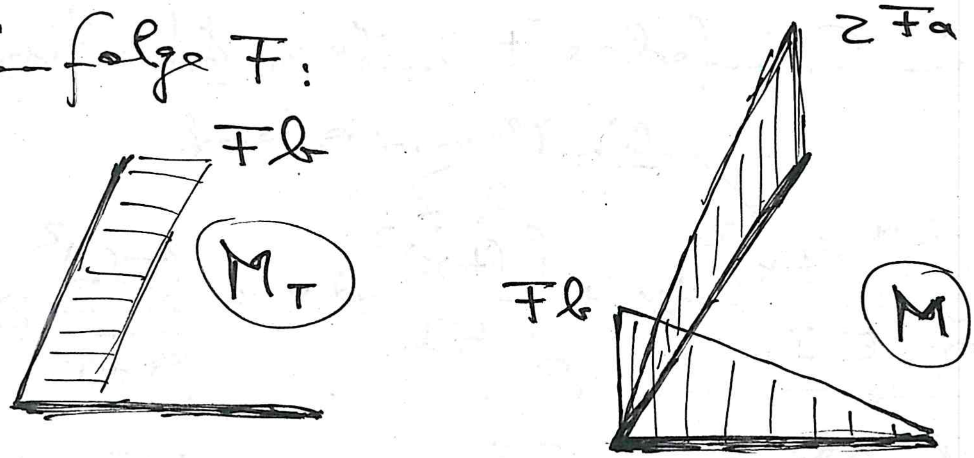
$$\Rightarrow F = -M_B\left[\frac{G I_T}{EI}\left(\frac{8a^3 + b^3}{3ab}\right) + 2b\right]^{-1}$$

Aufg. 5 – alternative Lsg

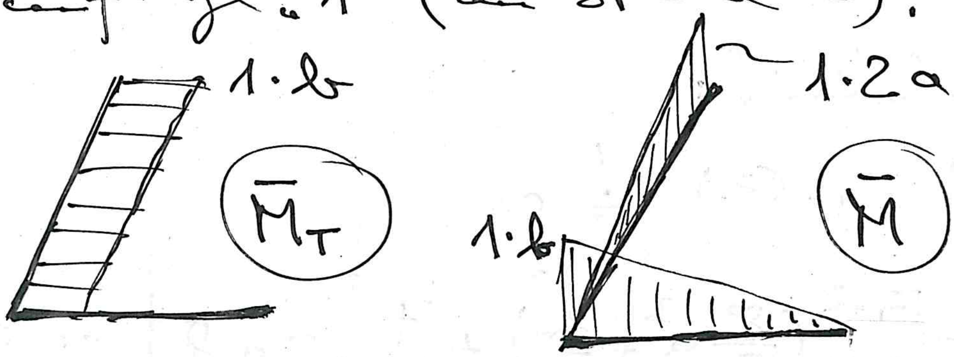
- infolge M_B:



- infolge F:



- infolge „1" (an Stelle C):



$$\Rightarrow f = \int \frac{M\bar{M}}{EI}\,dx + \int \frac{M_T\bar{M}_T}{EI}\,dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}b^3F + \frac{1}{3}(2a)^3F\right)$$

$$+ \frac{1}{GI_T}\left(2ab^2F + abM_B\right) \overset{!}{=} 0$$

Aufg. 5 – alternat. Lsg – Fortsetzung

$$\Rightarrow \frac{Fb^3}{3EI} + \frac{8Fa^3}{3EI} + \frac{2Fab}{GI_T} + \frac{M_B\,ab}{GI_T} = 0$$

$$\Rightarrow F = -M_B\left[\frac{GI_T}{EI}\left(\frac{8a^3+b^3}{3ab}\right) + 2b\right]^{-1}$$