Modulprüfung in Technischer Mechanik
am 8. März 2016

Festigkeitslehre

Aufgaben

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: __________________ Fachrichtung: __________________

Hinweise:

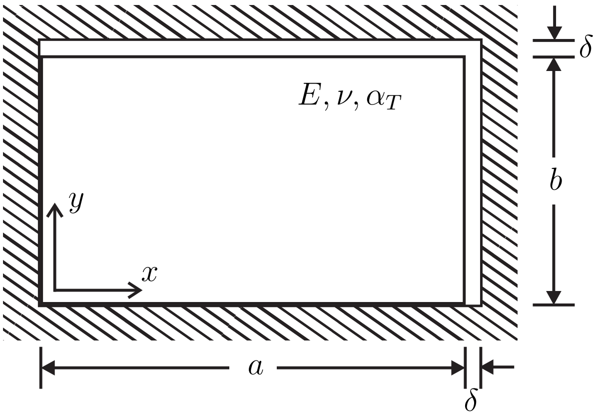
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

Eine Rechteckscheibe ($a > b$) wird in einen etwas größeren starren Ausschnitt eingesetzt, sodass Spalten der Breite δ vorhanden sind. Anschließend wird die Scheibe erwärmt. Es sei angenommen, dass die Scheibe an allen Rändern reibungsfrei gleiten kann und ein ebener Spannungszustand vorliegt.



a) Welche Temperaturerhöhung ΔT_a ist erforderlich, damit der rechte Spalt gerade geschlossen wird?

b) Bei welcher Temperaturerhöhung ΔT_b schließt sich auch der obere Spalt? Wie groß ist dann σ_x?

c) Welche Spannungen herrschen in der Scheibe für $\Delta T > \Delta T_b$?

Gegeben: $a,\ b,\ \delta,\ E,\ \nu,\ \alpha_T$

$\boxed{\textbf{Aufgabe 1}}$

Elastizitätsgesetz: (Ebener Spannungszustand!)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha_T \Delta\, T$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha_T \Delta\, T$$

a) Der rechte Spalt wird gerade geschlossen, wenn gilt

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{a}\ .$$

Da sich die Scheibe reibungsfrei ausdehnt, gilt $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Mit dem Elastizitätsgesetz folgt

$$\varepsilon_x = \alpha_T\ \Delta T_a \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{a}$$
$$\Rightarrow\ \Delta\ T_a = \underline{\underline{\frac{\delta}{\alpha_T\ a}}}\ .$$

b) Der obere Spalt schließt sich bei einer Dehnung von $\varepsilon_y = \frac{\delta}{b}$. Des Weiteren gilt $\sigma_y = 0$ und $\varepsilon_x = \frac{\delta}{a}$. Mit dem Elastizitätsgesetz folgt

$$\text{I.}\quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x) + \alpha_T\ \Delta T_b \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{b}$$
$$\text{II.}\quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x + \alpha_T\ \Delta T_b \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{a}$$

$$\stackrel{\text{I.}}{\Rightarrow}\quad \sigma_x = \left(\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T_b\right) E$$
$$\stackrel{\text{II.}}{\Rightarrow}\quad -\nu\left(\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T_b\right) + \alpha_T \Delta T_b = \frac{\delta}{b}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\Delta T_b = \frac{\delta}{\alpha_T}\frac{(a+\nu b)}{ab\,(1+\nu)}}}$$
$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sigma_x = \frac{\delta\,(b-a)}{ab\,(1+\nu)}E}}$$

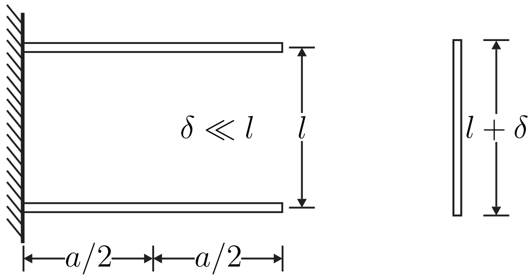
c) Beide Spalte sind geschlossen, sodass gilt $\varepsilon_x = \frac{\delta}{a}$, $\varepsilon_y = \frac{\delta}{b}$.

$$\sigma_x = E\left[\varepsilon_x - \alpha_T \Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_y\right] \ \Rightarrow \sigma_x = E\left[\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_y\right]$$
$$\sigma_y = E\left[\varepsilon_y - \alpha_T \Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_x\right] \ \Rightarrow \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\frac{\delta}{b} + \nu\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T\,(1+\nu)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma_y = E\left[\delta\left(\frac{a+\nu b}{ab\left(1-\nu^2\right)}\right) - \frac{\alpha_T \Delta T}{(1-\nu)}\right]}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma_x = E\left[\delta\left(\frac{b+\nu a}{ab\left(1-\nu^2\right)}\right) - \frac{\alpha_T \Delta T}{(1-\nu)}\right]}}$$

2. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Zwei parallele Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge a) sind im Abstand l voneinander einseitig eingespannt. Ein elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA) der Länge $l+\delta$ wird bei $a/2$ zwischen die Balken gezwängt.

a) Wie groß ist die Stabkraft?

b) Wie lautet der Biegelinienverlauf $w(x)$ zu der unten angegebenen Hilfslösung für $x > \frac{L}{2}$?

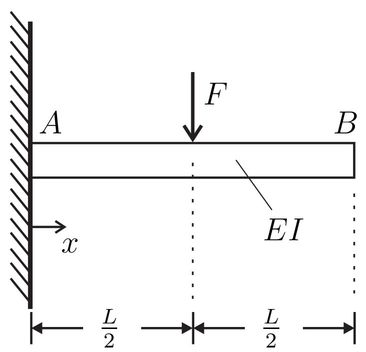
c) Um welchen Betrag e ändert sich der Abstand l der Balkenenden?

Gegeben: $EI,\ EA,\ a,\ l,\ \delta$

Hinweis: Bearbeiten Sie die Aufgabe unter Verwendung der Stabkraft als statisch Überzählige und Berücksichtigung einer Verträglichkeitsbedingung.
Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

Hilfslösung:

$$w(x) = \frac{FL^3}{6EI}\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3}\right) \text{ für } x \le \frac{L}{2}$$



Aufgabe 2

a) 1. Verträglichkeit mit Geometrie:

$$l + 2w = (l + \delta) - \Delta l$$
$$\Rightarrow 2w = \delta - \Delta l$$

mit der Stauchung des Stabes Δl und der Biegung des Balkens w.

2. Einführung der Stabkraft als statisch Überzählige X, die als Querkraft bei $x = \frac{a}{2}$ an den Stäben angreift.

3. Lösung der Teilsysteme Biegebalken und Zug-Druck-Stab unter Zuhilfenahme der Hilfslösung:

   – Biegebalken:

$$w\left(x = \frac{a}{2}\right) = \frac{Xa^3}{6EI}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \;\Rightarrow\; w\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Xa^3}{24EI}$$

   – Zug-Druck-Stab:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \;\Rightarrow\; \frac{\Delta l}{l+\delta} = \frac{X}{EA}$$

4. Einsetzen in Verträglichkeitsbedingung liefert die statisch Überzählige:

$$2 \cdot \frac{Xa^3}{24EI} = \delta - \frac{X}{EA}(l+\delta) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{X = \frac{\delta}{\frac{a^3}{12EI} + \frac{l+\delta}{EA}}}}$$

b) Balken ist für $x > L/2$ belastungsfrei.

$$M\left(x > \frac{L}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow w''\left(x > \frac{L}{2}\right) = 0 \,(\text{Balken gerade!})$$

Lineare Extrapolation der gegebenen Biegelinie $w_1(x)$ für $0 \leq x \leq L/2$ mit Ansatz $w_2(x) = mx + b$ für $x > L/2$.

$$\text{I. } w_1'\left(\frac{L}{2}\right) \overset{!}{=} w_2'\left(\frac{L}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad m = w_1'\left(\frac{L}{2}\right)$$
$$\text{II. } w_1\left(\frac{L}{2}\right) \overset{!}{=} w_2\left(\frac{L}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad b = w_1\left(\frac{L}{2}\right) - w_1'\left(\frac{L}{2}\right)\frac{L}{2}$$

$$w_1'(x) = \frac{FL^3}{EI}\left(\frac{x}{2L^2} - \frac{x^2}{2L^3}\right)$$

$$w_1'\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{FL^2}{8EI}$$

$$w_1\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{24EI}$$

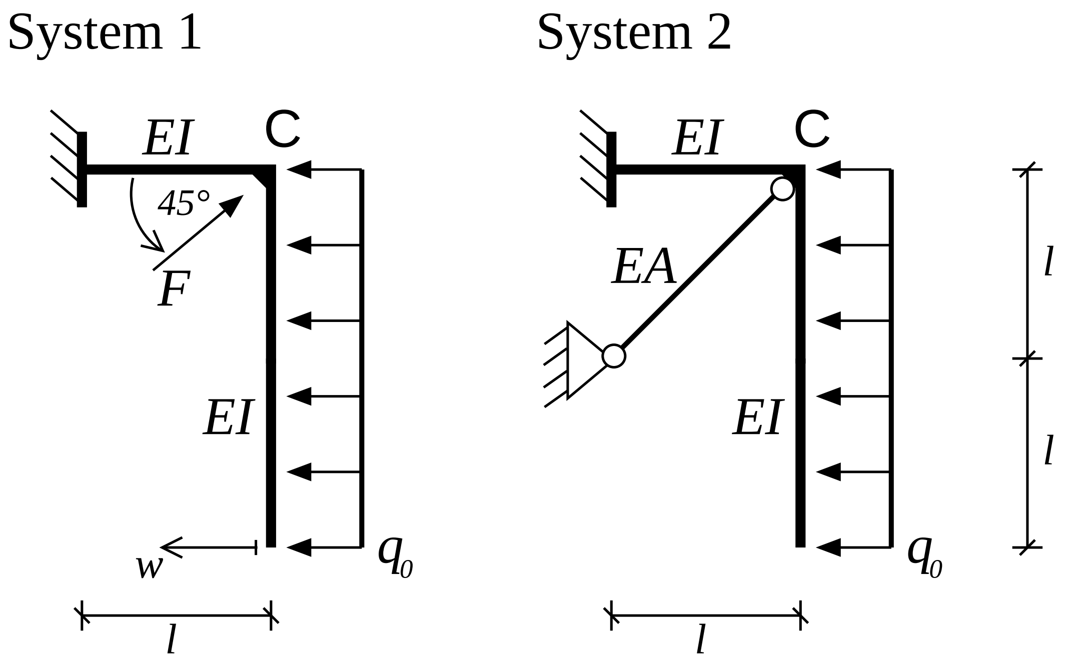
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{w_2(x) = \frac{FL^3}{6EI}\left(\frac{3x}{4L} - \frac{1}{8}\right)}}$$

c)

$$e = 2w\,(x = a)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{e = \frac{5}{24}\frac{a^3}{EI}\left(\frac{\delta}{\frac{a^3}{12EI} + \frac{l+\delta}{EA}}\right)}}$$

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Gegeben ist der abgewinkelte Kragarm mit der Biegesteifigkeit EI. Die Dehnsteifigkeit im Balken soll vernachlässigt werden.

Lösen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte folgende Teilaufgaben.

a) Berechnen Sie in System 1 die Kraft F so, dass die Verschiebung w gleich Null ist.

b) In System 2 ist die im Stab übertragene Kraft zu berechnen.

c) Geben Sie für den Fall, dass im Stab die Kraft $S = -\sqrt{2}\ q_0 l$ übertragen wird, die erforderliche Querschnittsfläche A an.

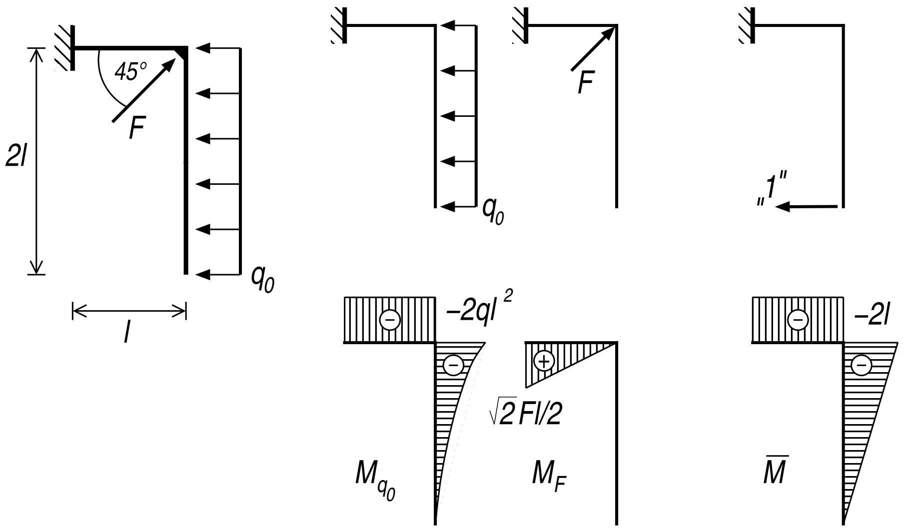
d) Beeinflusst der Stab das in der Ecke C übertragene Biegemoment? Geben für beide Systeme das Biegemoment in der Ecke C an.

Gegeben: $l,\ E,\ I,\ q_0$

Hinweis: $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 3

a) Die Schnittgrößen infolge der äußeren Belastung können superponiert $M = M_{q_0} + M_F$ angegeben werden. Für die Berechnung der Verschiebung w wird eine virtuelle Last „1“ aufgebracht.



Die Verschiebung wird mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte berechnet.

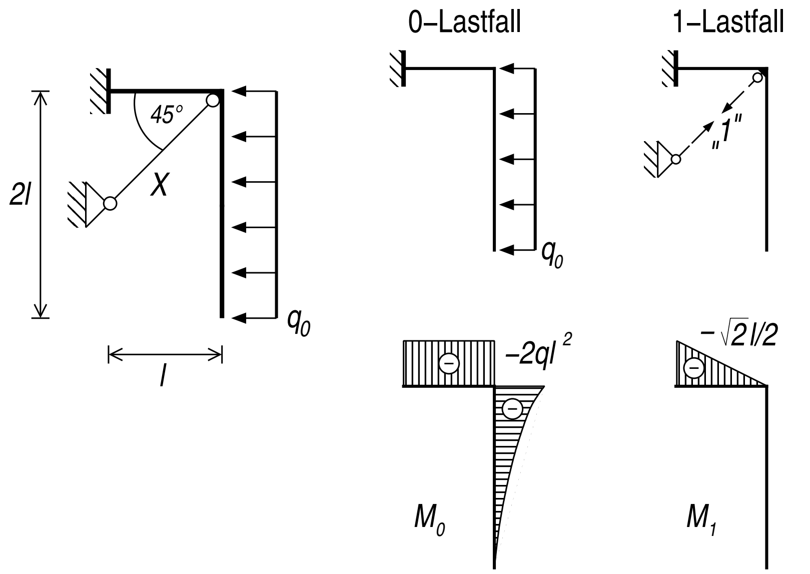
$$
\begin{aligned}
w &= \frac{1}{EI}\int M\bar{M}\;dx = \frac{1}{EI}\int (M_{q_0} + M_F)\bar{M}\;dx \\
&= \frac{1}{EI}\left((-2q_0l^2)(-2l)\cdot l + \frac{1}{4}(-2q_0l^2)(-2l)\cdot 2l + \frac{1}{2}(Fl\frac{\sqrt{2}}{2})(-2l)\cdot l\right) \\
&= \frac{1}{EI}\left(6\;q_0l^4 - Fl^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Die Forderung, dass die Verschiebung verschwindet liefert die gesuchte Kraft.

$$
w \overset{!}{=} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 6\;q_0 l = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{F = 6\sqrt{2}q_0l}}
$$

b) Das System ist einfach statisch unbestimmt, und die die Kraft im Stab kann als statisch Unbestimmte gewählt werden. Die α_{ik} zur Berechnung der statisch Überzähligen $X = -\alpha_{10}/\alpha_{11}$ werden mit der Integraltafel bestimmt.

Mit den Schnittgrößen im 0- und 1-Lastfall



Für α_{10} (Konstanter Verlauf mit Dreieck), und α_{11} (Dreieck mit Dreieck)

$$\alpha_{10} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI}\,\frac{1}{2}(-2q_0 l^2)(\frac{-\sqrt{2}}{2}l)\cdot l = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{q_0 l^4}{EI}$$

$$\alpha_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx + \int \frac{N_1^2}{EA} dx = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}l)^2 + \frac{1}{EA}\cdot 1\cdot 1\cdot\sqrt{2}l$$

$$= \frac{l^3}{6\ EI} + \frac{\sqrt{2}\ l}{EA}$$

Die unbekannte Stabraft wird

$$\Rightarrow X = \underline{\underline{S}} = \frac{-\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \underline{\underline{\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0 l^4}{EI}}{\frac{l^3}{6\ EI} + \frac{\sqrt{2}\ l}{EA}}}}$$

c) Für den Fall, dass im Stab die Kraft $S = -\sqrt{2}F$ übertragen wird gilt

$$S \stackrel{!}{=} -\sqrt{2}F$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0 l^4}{EI} = -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{q_0 l^4}{EI} - 2\frac{q_0 l^2}{EA}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}l^2}{3}\frac{l^2}{I} = -\frac{2}{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\frac{6}{\sqrt{2}}\frac{I}{l^2} = 3\sqrt{2}\frac{I}{l^2}}}$$

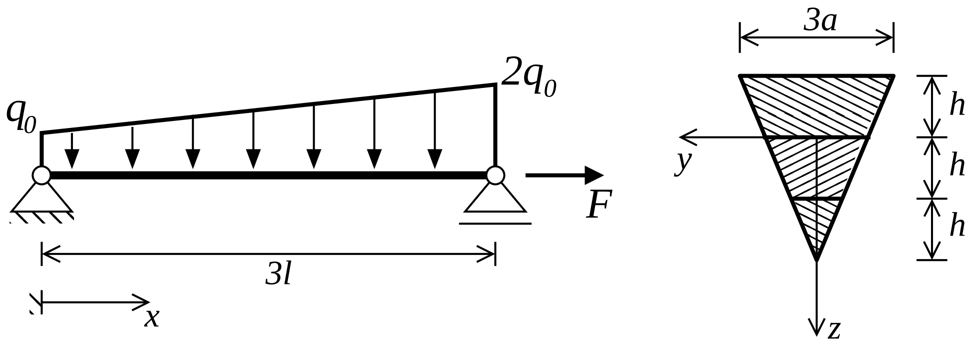
d) Moment in Punkt C

in System 1: $M^C = M^C_{q_0} + M^C_F = -2q_0 l^2 + 0 = -2q_0 l^2$

in System 2: $M^C = M^C_0 + X \cdot M^C_1 = -2q_0 l^2 + X \cdot 0 = -2q_0 l^2$

Der Stab hat keinen Einfluss auf das Biegemoment in der Ecke C.

4. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Für das dargestellte System wird ein aus drei verleimten Balken der Höhe h zusammengesetztes Querschnittsprofil verwendet. Für die skizzierte Belastung seien die Schnittgrößenverläufe wie folgt bereits ermittelt worden:

$$N = F, \quad M_y(x) = q_0 l \left(2x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l} - \frac{1}{18}\frac{x^3}{l^2} \right), \quad Q_z(x) = q_0 l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{1}{6}\frac{x^2}{l^2} \right)$$

Ermitteln Sie an der Stelle $x = 2l$

a) die Schubspannungen in den Fugen bei $z = 0$ und $z = h$,

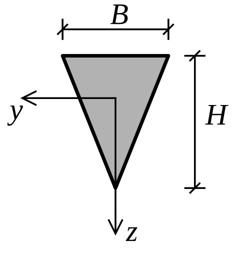
b) die erforderliche Balkenhöhe h, sodass gilt: $|\tau_{xz}| \leq \dfrac{1}{5}\dfrac{q_0 l}{a^2}$.

Im Folgenden ist $h = a$ anzunehmen.

c) Geben Sie an wie groß die Zugkraft F sein muss, damit an der Stelle $x = 2l$ der gesamte Querschnitt auf Zug ($\sigma > 0$) belastet ist.

Gegeben: $a,\ l,\ q_0$

Hinweis:



$$I_y = \frac{BH^3}{36}$$

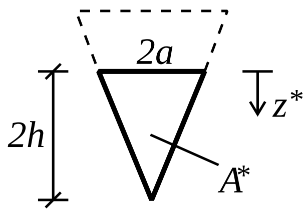
Aufgabe 4

a) Berechnung der Schubspannung in der oberen und unteren Fuge:

$$I_y = \frac{3a\,(3h)^3}{36} = \frac{9}{4}ah^3 \qquad \text{FTM konstant über die Länge}$$

$$Q_z(x=2l) = ... = -\frac{2}{3}q_0 l \qquad \text{Querkraft an der Stelle } x = 2l$$

Obere Fuge $z = 0$:

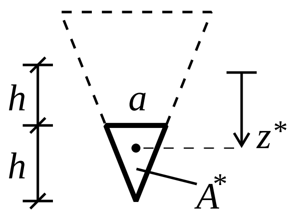


$$b(z=0) = 2a$$

$$S_y(z=0) = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2h}_{z^*}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2h}_{A^*} = \frac{4}{3}ah^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_{xz}^{oben}}} = \frac{Q_z(x)\,S_y(z)}{I_y\;b(z)} = \frac{-\frac{2}{3}q_0 l\cdot\frac{4}{3}ah^2}{\frac{9}{4}ah^3\cdot 2a} = \underline{\underline{-\frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah}}}$$

Untere Fuge $z = h$:



$$b(z=h) = a$$

$$S_y(z=h) = \underbrace{(h+\frac{1}{3}\cdot h)}_{z^*}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h}_{A^*} = \frac{2}{3}ah^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_{xz}^{unten}}} = \frac{Q_z(x)\,S_y(z)}{I_y\;b(z)} = \frac{-\frac{2}{3}q_0 l\cdot\frac{2}{3}ah^2}{\frac{9}{4}ah^3\cdot a} = \underline{\underline{-\frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah}}}$$

b) Bemessung der Balkenhöhe h

$$|\tau_{xz}^{oben}| = |\tau_{xz}^{unten}| = \frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah} \overset{!}{\leq} \frac{1}{5}\frac{q_0 l}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h}} \geq \frac{16}{81}\cdot\frac{5}{1}\cdot a = \frac{80}{81}a \,\underline{\underline{\approx a}}$$

c) Normalspannung infolge gerader Biegung und Normalkraft soll an der Stelle $x = 2l$ für alle z größer 0 sein. Das gilt, wenn

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y(x=2l)}{I_y}\cdot z \overset{!}{\geq} 0$$

Im Bereich $0 \leq z \leq +2a$ ist $\sigma > 0$, da

$$N = F \qquad > 0$$

$$M_y(x=2l) = q_0 l\left(2\cdot 2\,l - \frac{1}{2}\cdot\frac{4\,l^2}{l} - \frac{1}{18}\cdot\frac{8\,l^3}{l^2}\right) = \frac{14}{9}q_0 l^2 \qquad > 0$$

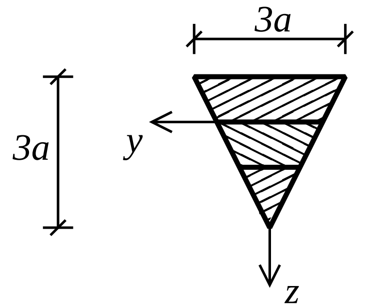
Im Bereich $-a \leq z < 0$ ist $\sigma > 0$, wenn an der Querschnittoberkante gilt

$$\sigma(z=-a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{F}{A} + \frac{M_y(x=2l)}{I_y}\cdot(-a) \overset{!}{\geq} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad F \geq M_y(x=2l)\cdot\frac{A}{I_y}\cdot a$$

Für den Querschnitt gilt

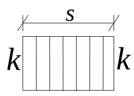
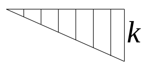
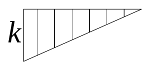
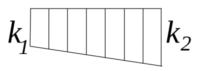
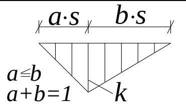
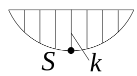
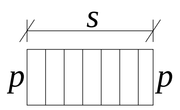
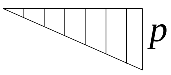
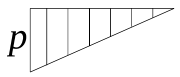
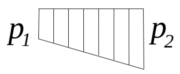
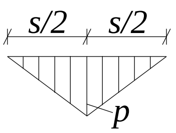
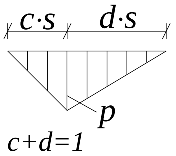
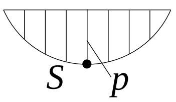
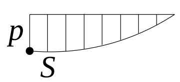
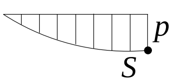
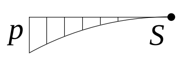
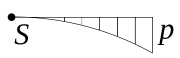


$$A = \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 3a = \frac{9}{2}a^2$$

$$I_y = \frac{9}{4}a^4 \qquad \text{aus a) mit } h = a$$

$$\Rightarrow \quad F \geq \frac{14}{9}q_0 l^2 \cdot \frac{\frac{9}{2}a^2}{\frac{9}{4}a^4}\cdot a = \frac{14}{9}q_0 l^2\cdot\frac{2}{a} = \frac{28}{9}\frac{q_0 l^2}{a} \approx 3.1\frac{q_0 l^2}{a}$$

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x)\mathrm{d}x$

$K(x)$ / $P(x)$	 s; k, k	 k	 k	 k_1, k_2	 $a\cdot s$, $b\cdot s$; $a \leq b$, $a+b=1$; k	 S, k
 s; p, p	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
 p	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
 p	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
 p_1, p_2	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b) + p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
 $s/2$, $s/2$; p	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
 $c\cdot s$, $d\cdot s$; p; $c+d=1$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
 S, p	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
 p, S	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
 p, S	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
 p, S	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
 S, p	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \stackrel{\wedge}{=}$ Scheitel einer quadratischen Parabel