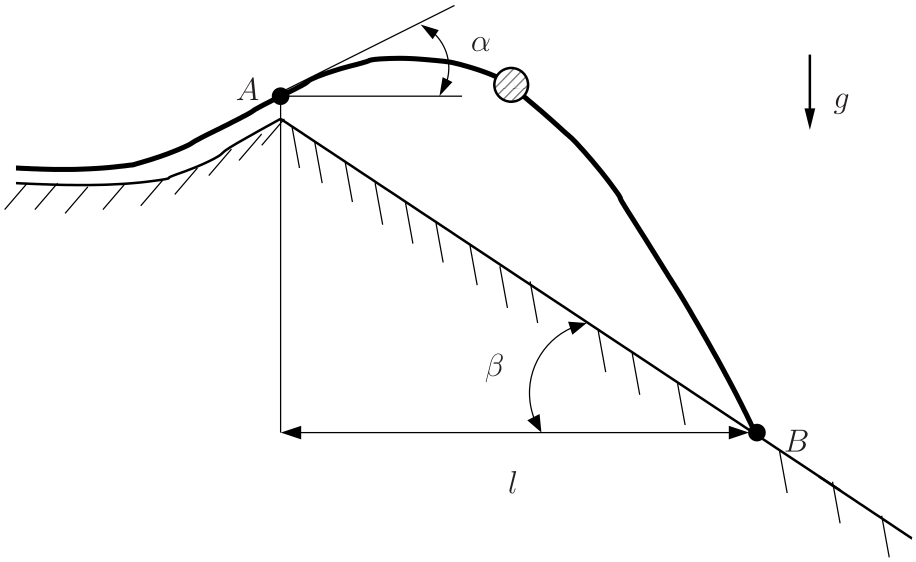
Aufgabe 1 (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



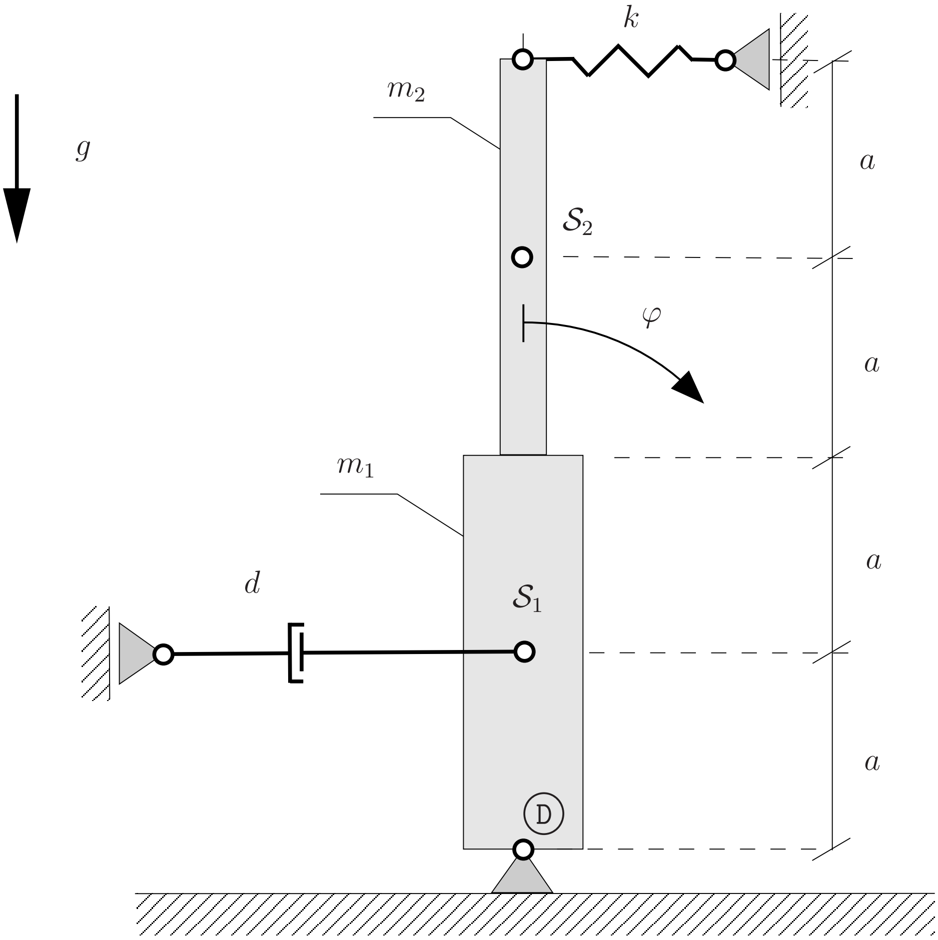
Ein Motorschlitten, angenommen als Massenpunkt, verlässt mit der Geschwindigkeit v_A die Aufschüttung in A. Der Winkel zwischen der Geschwindigkeit v_A und der Horizontalen ist α und der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist β.

a) Bestimmen Sie die Flugzeit von A nach B und die Strecke l.

b) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsbetrag beim Auftreffen in B und die Beschleunigung entlang der Flugbahn AB.

Gegeben: $v_A = 8\,\frac{m}{s}, \alpha = \frac{\pi}{4}, \tan\beta = \frac{1}{4}, g = 10\frac{m}{s^2}$.

Aufgabe 2 (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Zwei starr miteinander verbundene Stäbe der Masse m_1 und m_2 sind drehbar im Punkt D gelagert. Der dargestellte Dämpfer mit Dämpfungskonstante d ist an dem Schwerpunkt $\mathcal{S}_1$ des ersten Stabes befestigt. Am Ende des zweiten Stabes ist eine Feder mit Steifigkeit k angebracht. Das System befindet sich im Erdanziehungsfeld. Für $\varphi = 0$ sei die Feder entspannt, zudem ist durch den Aufbau gegeben, dass die Feder und der Dämpfer nur horizontale Auslenkungen erfahren. Es darf angenommen werden, dass das System nur kleine Auslenkungen ausführt, d.h. $|\varphi| \ll 1$.

a) Schneiden Sie das System frei (Freikörperbild).

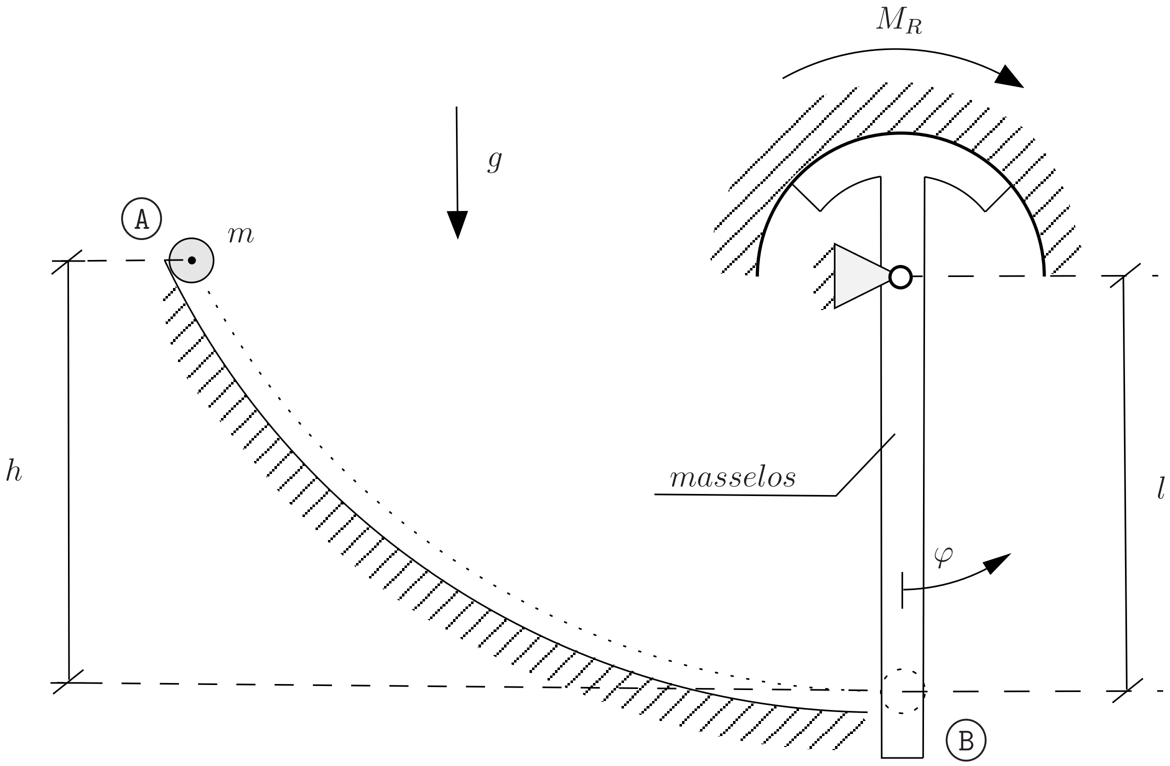
b) Geben Sie die linearisierte Bewegungsgleichung in φ an.

c) Wie lautet die Eigenkreisfrequenz ω, sowie der Dämpfungsgrad D des Systems?

d) Wie groß muss k mindestens sein, damit eine stabile Gleichgewichtslage gewährleistet ist?

Geg.: $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, g, d, k, a

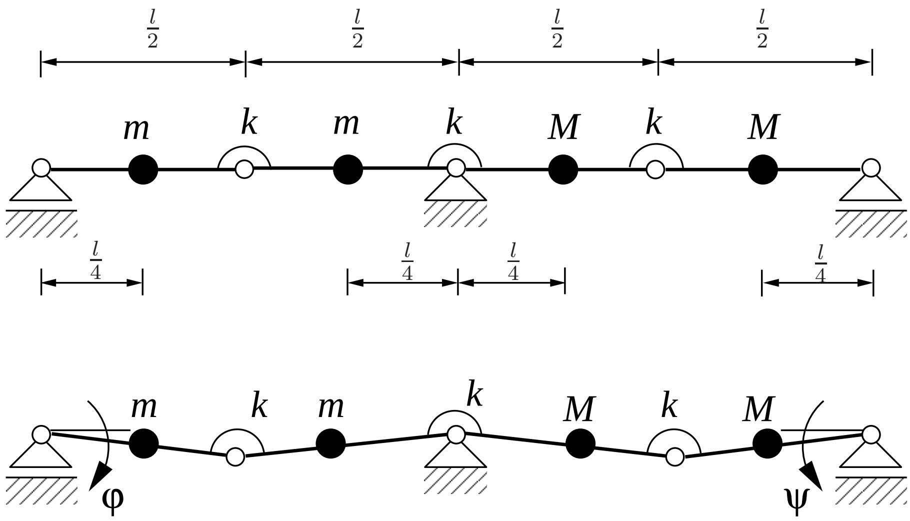
Aufgabe 3 (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Ein Massenpunkt m wird im Punkt A aus der Ruhe losgelassen, bewegt sich reibungsfrei eine Rampe der Höhe h hinunter und trifft schließlich in Punkt B auf den dargestellten **masselosen**, starren und drehbar gelagerten Hebel. Bei der anschließenden Bewegung drehen sich Hebel und Massenpunkt gemeinsam um das Drehlager. Der Drehbewegung des Hebels wirkt ein konstantes Reibmoment M_R entgegen. Die Parameter des Systems seien so vorgegeben, dass von kleinen Auslenkungen des Hebels auszugehen ist, d.h. $|\varphi| \ll 1$. Ermitteln Sie den maximalen Verdrehwinkel φ_{max} des Hebels unter Annahme kleiner Auslenkungen.

Geg.: m, g, h, l, M_R

Aufgabe 4 (ca. 35 % der Gesamtpunkte)



Das Schwingungsverhalten eines Zweifeldträgers der Länge $2l$ soll untersucht werden. Dazu wird die Gesamtmasse des Trägers in 4 Einzelmassen der Masse m bzw. M konzentriert; ebenso wird die Steifigkeit durch drei Drehfedern der Steifigkeit k modelliert. Der Träger selbst wird dann als starr und masselos angenommen. Die Drehfedern sind entspannt wenn der Träger in horizontaler Lage liegt. Man bestimme bei Vernachlässigung des Gewichtspotentials:

a) die kinetische und potentielle Energie des Systems.

b) die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen.

c) die linearisierten Bewegungsgleichungen des Systems unter der Annahme kleiner Auslenkungen.

Rechnen Sie mit folgender Form der Bewegungsgleichungen weiter:

$$\frac{l^2}{8}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

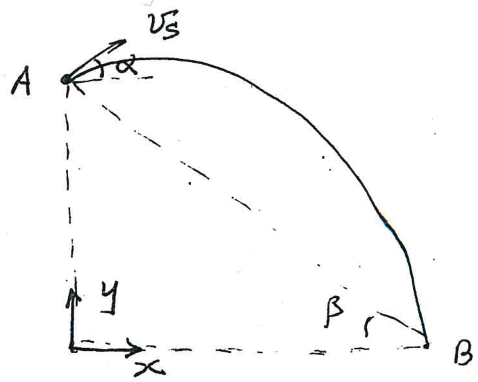
d) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems und die zugehörigen Amplitudenverhältnisse für $M = m$.

d) Skizzieren Sie die Eigenformen.

Gegeben: M, m, k, l, g

IM 3 WS 14/15

1. Aufgabe



a) $v_S = 8\ \frac{m}{s}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\tan\beta = \frac{1}{4}$

Anfangsgesch.: $v_{x,0} = v_S \cdot \cos\alpha = 8\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$

$v_{y,0} = v_S \cdot \sin\alpha = 8\frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$

Beschleunigung:

$\ddot{x} = 0$

Gesch. $\dot{x} = v_{x,0} = 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$

Strecke: $x = v_{x,0} \cdot t + x_0 = 4\sqrt{2}\, t \quad (x_0 = 0)$

Beschleunigung: $\ddot{y} = -g \qquad g = 10\ \frac{m}{s^2}$

Gesch.: $\dot{y} = -gt + v_{y,0} = -gt + 4\sqrt{2}$

Weg: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + 4\sqrt{2}\,t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + 4\sqrt{2}\,t + \frac{1}{4}R$

mit $\frac{y_0}{R} = \tan\beta = \frac{1}{4} \qquad y_0 = \frac{1}{4}R$

Am Punkt B: $y(t=t_B) = 0$

$0 = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_B^2 + 4\sqrt{2}\,t_B + \frac{1}{4}R \quad (*)$

$x(t=t_B) = R$

$R = 4\sqrt{2}\,t_B \quad (**)$

(**) in (*) einsetzen:

$0 = -\frac{1}{2} \cdot 10\,t_B^2 + 4\sqrt{2}\,t_B + \sqrt{2}\,t_B$

$0 = -5\,t_B^2 + 5\sqrt{2}\,t_B$

$5t_B^2 - 5\sqrt{2}\,t_B = 0 \qquad t_B^2 - \sqrt{2}\,t_B = 0 \qquad t_B(t_B - \sqrt{2}) = 0$

$t_B = 0$ (X) $\wedge$ $t_B = \sqrt{2}\ s$

$R = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\ m = 8\ m$

b) $\dot{y}(t=t_B) = -10 \cdot \sqrt{2} + 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s} = -6\sqrt{2}\ \frac{m}{s} = -8.5\ \frac{m}{s}$

$\dot{x}(t=t_B) = 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$

$v_B = \sqrt{36 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = 2\sqrt{26}\ \frac{m}{s}$ $\underset{=10.198}{}$ ~~$= 5.6569\ \frac{m}{s}$~~

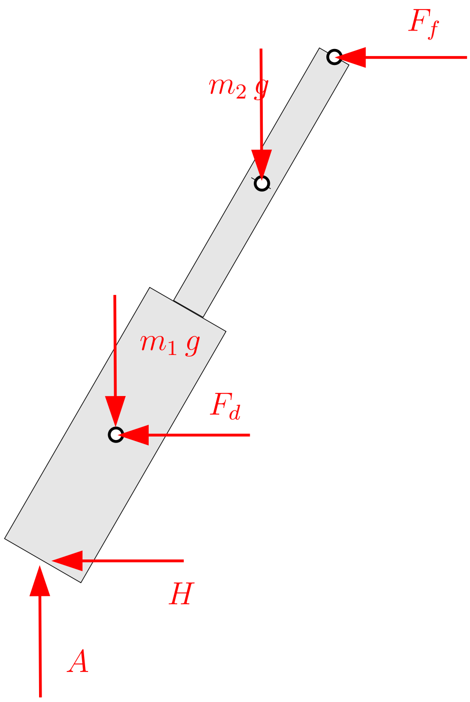
$a = -g\ \frac{m}{s^2} = -10\ \frac{m}{s^2}$

Lösung zu Aufgabe 2

Die Linearisierung kann direkt bei der kinematischen Betrachtung erfolgen, oder nachdem man die nichtlinearen Bewegungsgleichungen aufgestellt hat.

Legende: vorher | nachher

a) FKB



b) Bewegungsgleichung bzgl. φ

Federkraft

$$F_f = ku = \overset{4ak\varphi}{4ak\sin\varphi}$$

Dämpferkraft

$$F_d = d\dot{x}_{\mathcal{S}_1} = \overset{da\dot{\varphi}}{da\cos\varphi\dot{\varphi}}$$

Massenträgheitsmoment bzgl. Punkt D

$$\begin{aligned}
\theta^{(D)} &= \theta^{(D)}_{Stab\,(1)} + \theta^{(D)}_{Stab\,(2)} \\
&= \frac{1}{12}m_1 l^2 + m_1 a^2 + \frac{1}{12}m_2 l^2 + m_2(3a)^2 \\
&= \frac{1}{12}2m(2a)^2 + 2ma^2 + \frac{1}{12}m(2a)^2 + m(3a)^2 \\
&= 12ma^2
\end{aligned}$$

Drallsatz bzgl. Punkt D ($\equiv$ Momentanpol)

$$\theta^{(D)}\ddot{\varphi} - \overset{m_1 ga\varphi}{m_1 ga \sin\varphi} - \overset{m_2 g3a\varphi}{m_2 g3a \sin\varphi} + \overset{F_f \cdot 4a}{F_f \cdot 4a \cos\varphi} + \overset{F_d \cdot a}{F_d \cdot a \cos\varphi} = 0$$

$$\theta^{(D)}\ddot{\varphi} - \overset{2mga\varphi}{2mga \sin\varphi} - \overset{mg3a\varphi}{mg3a \sin\varphi} + \overset{4ak\varphi \cdot 4a}{4ak \sin\varphi \cdot 4a \cos\varphi} + \overset{da\dot{\varphi}\cdot a}{da \cos\varphi \dot{\varphi} \cdot a \cos\varphi} = 0$$

Linearisierung | (-)

$$\theta^{(D)}\ddot{\varphi} - 5mga\varphi + 16a^2 k\varphi + da^2\dot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{da^2}{\theta^{(D)}}\dot{\varphi} + \frac{16a^2k - 5mga}{\theta^{(D)}}\varphi = 0$$

c) Eigenkreisfrequenz & Dämpfungsgrad

$$\omega = \sqrt{\frac{16a^2k - 5mga}{\theta^{(D)}}}$$

$$2D\omega = \frac{da^2}{\theta^{(D)}}$$

$$D = \frac{da^2}{2\theta^{(D)}\omega}$$

d) Bedingung für stabiles GG

$$16a^2k \geq 5mga$$

$$k \geq \frac{5mga}{16ka}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Energiesatz A $\rightarrow$ B ; NN bei B

$$(E_k)_A = 0 \qquad (E_p)_A = mgh$$
$$(E_k)_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad (E_p)_B = 0$$

Eingesetzt

$$(E_k)_A + (E_p)_A = (E_k)_B + (E_p)_B$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$
$$v_B = \sqrt{2gh}$$

b) Vollplastischer Stoß ($e = 0$)

$$\bar{v}_B = v_B = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

Kinematik

$$\dot{\varphi} \cdot l = \bar{v}_B \tag{2}$$

Arbeitssatz B $\rightarrow$ C (φ_{max}) ; NN bei B

$$(E_k)_B = \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot (\frac{\bar{v}_B}{l})^2 \qquad (E_p)_B = 0$$
$$(E_k)_C = 0 \qquad (E_p)_C = mgl(1 - \cos\varphi) \overset{|\varphi| \ll 1}{=} 0$$

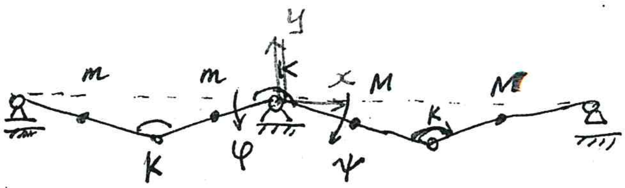
Reibarbeit

$$W_{BC}^R = -\int_0^{\varphi_C} M_R \,\mathrm{d}\,\varphi = -M_R\varphi_C$$

Eingesetzt

$$(E_k)_B + (E_p)_B + W_{BC}^R = (E_k)_C + (E_p)_C$$
$$\frac{1}{2} \cdot ml^2 \cdot (\frac{\bar{v}_B}{l})^2 - M_R\varphi_C = 0$$
$$\varphi_C = \frac{1}{2}ml^2 \cdot (\frac{\bar{v}_B}{l})^2 \cdot \frac{1}{M_R} = \frac{mgh}{M_R}$$

4. Aufgabe



Ortsvektoren:

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{l}{4}\cos\psi \\ -\frac{l}{4}\sin\psi \end{bmatrix} \qquad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{l}{2}\cos\psi + \frac{l}{4}\cos\psi \\ -\frac{l}{4}\sin\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}l\cos\psi \\ -\frac{1}{4}l\sin\psi \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{4}\cos\varphi \\ -\frac{l}{4}\sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \underline{r}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\cos\varphi - \frac{l}{4}\cos\varphi \\ -\frac{l}{4}\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}l\cos\varphi \\ -\frac{1}{4}l\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren:

$$\dot{\underline{r}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{4}\sin\psi\,\dot\psi \\ -\frac{l}{4}\cos\psi\,\dot\psi \end{bmatrix} \qquad \dot{\underline{r}}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\sin\psi\,\dot\psi - \frac{l}{4}\sin\psi\,\dot\psi \\ -\frac{l}{4}\cos\psi\,\dot\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}l\sin\psi\,\dot\psi \\ -\frac{1}{4}l\cos\psi\,\dot\psi \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{r}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{l}{4}\sin\varphi\,\dot\varphi \\ -\frac{l}{4}\cos\varphi\,\dot\varphi \end{bmatrix} \qquad \dot{\underline{r}}_4 = \begin{bmatrix} \frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot\varphi + \frac{l}{4}\sin\varphi\,\dot\varphi \\ -\frac{l}{4}\cos\varphi\,\dot\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}l\sin\varphi\,\dot\varphi \\ -\frac{1}{4}l\cos\varphi\,\dot\varphi \end{bmatrix}$$

Kinetische Energie:

$$T_1 = \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{16}l^2\dot\psi^2\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{4}l^2\sin^2\psi\,\dot\psi^2 + \frac{1}{16}l^2\sin^2\psi\,\dot\psi^2 + \frac{1}{4}l^2\sin^2\psi\,\dot\psi^2 + \frac{1}{16}l^2\cos^2\psi\,\dot\psi^2\right)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{16}l^2\dot\varphi^2\right)$$

$$T_4 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}l^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{16}l^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{16}l^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{16}l^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2\right)$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{16}l^2\dot\psi^2\right) + \frac{1}{2}M\left(\frac{9}{16}l^2\sin^2\psi\,\dot\psi^2 + \frac{1}{16}l^2\dot\psi^2\cos^2\psi\right)$$
$$+ \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{16}l^2\dot\varphi^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{9}{16}l^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{16}l^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2\right)$$

$$= \frac{1}{32}Ml^2\dot\psi^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{2}l^2\sin^2\psi\,\dot\psi^2 + \frac{1}{16}l^2\dot\psi^2\right) + \frac{1}{32}ml^2\dot\varphi^2$$
$$+ \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}l^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{16}l^2\dot\varphi^2\right)$$

$$= \frac{1}{32}Ml^2\dot\psi^2 + \frac{1}{4}Ml^2\sin^2\psi\,\dot\psi^2 + \frac{1}{32}Ml^2\dot\psi^2 + \frac{1}{32}ml^2\dot\varphi^2$$
$$+ \frac{1}{4}ml^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{32}ml^2\dot\varphi^2$$

Potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2}K(\varphi+\psi)^2 + \frac{1}{2}K(2\varphi)^2 + \frac{1}{2}K(2\psi)^2$$
$$= \frac{1}{2}K(\varphi+\psi)^2 + 2K\varphi^2 + 2K\psi^2$$

Lagrange Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{32}Ml^2\dot\psi^2 + \frac{1}{4}Ml^2\sin^2\psi\,\dot\psi^2 + \frac{1}{32}Ml^2\dot\psi^2 + \frac{1}{32}ml^2\dot\varphi^2$$
$$+ \frac{1}{4}ml^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{32}ml^2\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}K(\varphi+\psi)^2 - 2K\varphi^2 - 2K\psi^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \frac{1}{16} M\ell^2 \dot\psi + \frac{1}{2} M\ell^2 \sin^2\psi\, \dot\psi + \frac{1}{16} M\ell^2 \dot\psi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = \frac{1}{8} M\ell^2 \ddot\psi + \frac{1}{2} M\ell^2 \sin^2\psi\, \ddot\psi + M\ell^2 \sin\psi \cos\psi\, \dot\psi^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{1}{8} m\ell^2 \dot\varphi + \frac{1}{2} m\ell^2 \sin^2\varphi\, \dot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{1}{8} m\ell^2 \ddot\varphi + \frac{1}{2} m\ell^2 \sin^2\varphi\, \ddot\varphi + m\ell^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \dot\varphi^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -K(\varphi+\psi) - 4K\psi \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -K(\varphi+\psi) - 4K\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{1}{8} M\ell^2 \ddot\psi + \frac{1}{2} M\ell^2 \sin^2\psi\, \ddot\psi + M\ell^2 \sin\psi \cos\psi\, \dot\psi^2 + 5K\psi + K\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{1}{8} m\ell^2 \ddot\varphi + \frac{1}{2} m\ell^2 \sin^2\varphi\, \ddot\varphi + m\ell^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \dot\varphi^2 + 5K\varphi + K\psi = 0$$

Für kleine Auslenkungen: $|\varphi| \ll 1$, $|\psi| \ll 1$ $\quad \sin\psi \approx \psi \quad \cos\psi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi \quad \cos\varphi \approx 1$

$$\frac{1}{8} M\ell^2 \ddot\psi + \frac{1}{2} M\ell^2 \psi^2 \ddot\psi + M\ell^2 \psi \dot\psi^2 + 5K\psi + K\varphi = 0$$

$$\frac{1}{8} m\ell^2 \ddot\varphi + \frac{1}{2} m\ell^2 \varphi^2 \ddot\varphi + m\ell^2 \varphi \dot\varphi^2 + 5K\varphi + K\psi = 0$$

$$\frac{1}{8} M\ell^2 \ddot\psi + 5K\psi + K\varphi = 0$$
$$\frac{1}{8} m\ell^2 \ddot\varphi + 5K\varphi + K\psi = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8}M\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot\psi \\ \ddot\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5K & K \\ K & 5K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 5K & K \\ K & 5K \end{bmatrix} \qquad \underline{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}M\ell^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}m\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{K} - \underline{M}\omega^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5K - \frac{1}{8}M\ell^2\omega^2 & K \\ K & 5K - \frac{1}{8}m\ell^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(25K^2 - \frac{5K}{8} m\ell^2\omega^2 - \frac{5K}{8} M\ell^2\omega^2 + \frac{1}{64} Mm\ell^4\omega^4\right) - K^2 = 0$$

$$24K^2 - \frac{5K}{8}\ell^2 (m+M)\omega^2 + \frac{1}{64} Mm\ell^4\omega^4 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\frac{5K}{8}\ell^2(m+M) \pm \sqrt{\frac{25K^2}{64}\ell^4(m+M)^2 - 4\cdot 24K^2 \cdot \frac{1}{64}Mm\ell^4}}{\frac{1}{32}Mm\ell^4} \qquad M = m$$

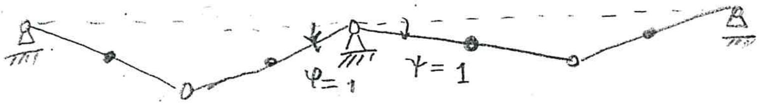
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\frac{5}{4}K\ell^2 m \pm \sqrt{\frac{100}{64}K^2\ell^4 m^2 - \frac{96K^2m^2\ell^4}{64}}}{\frac{1}{32}m^2\ell^4}$$

$$\omega_1^2 = \frac{\frac{5}{4}K\ell^2 m - \frac{2}{8}K\ell^2 m}{\frac{1}{32}m^2\ell^4} = \frac{K\ell^2 m}{\frac{1}{32}m^2\ell^4} = 32\frac{K}{m\ell^2} \qquad \omega_1 = 4\sqrt{2}\sqrt{\frac{K}{m}}\frac{1}{\ell}$$

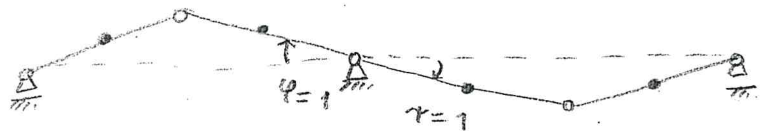
$$\omega_2^2 = \frac{\frac{5}{4}K\ell^2 m + \frac{1}{4}K\ell^2 m}{\frac{1}{32}m^2\ell^4} = \frac{\frac{6}{4}K\ell^2 m}{\frac{1}{32}m^2\ell^4} = 48\frac{K}{m}\frac{1}{\ell^2} \qquad \omega_2 = 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{K}{m}}\frac{1}{\ell}$$

$(15K - \frac{1}{8} m\ell^2 \cancel{\quad} 32 \frac{K}{m\ell^2})\, \psi + K\varphi = 0 \qquad \psi + \varphi = 0 \qquad \psi = 1 \quad \varphi = -1$

$(15K - \frac{1}{8} m\ell^2\, 48 \frac{K}{m\ell^2})\, \psi + K\varphi = 0 \qquad -K\psi + K\varphi = 0 \qquad \psi = 1 \quad \varphi = 1$



EF 2



EF 1