Modulprüfung

Dynamik

23. August 2023

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

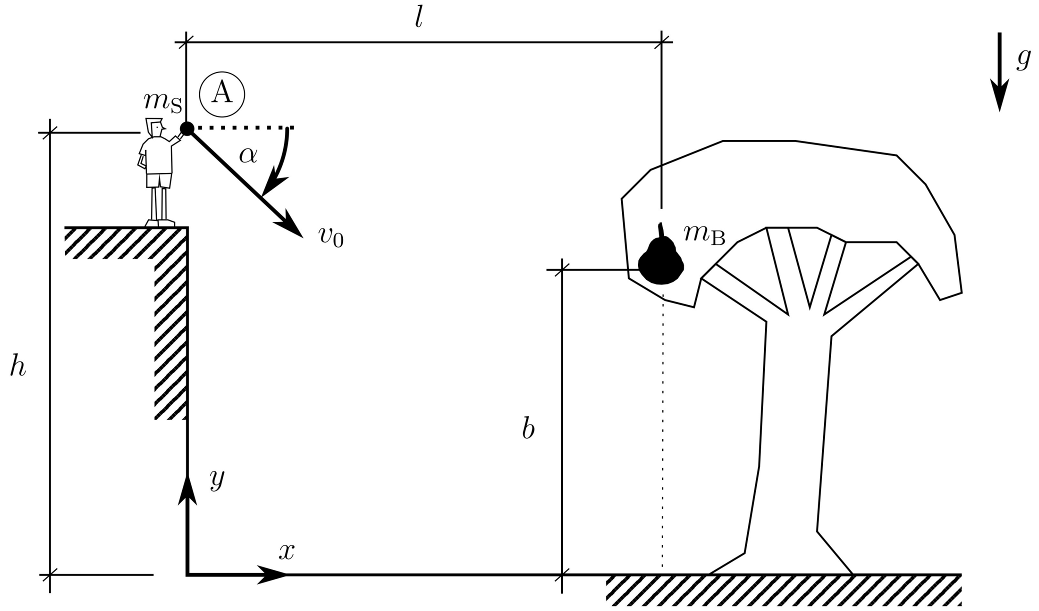
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)



Von einem Baum fällt eine Birne B (Masse m_B) senkrecht nach unten. Gleichzeitig mit dem Beginn des freien Falls der Birne wirft ein Kind bei A einen Stein (Masse m_S) unter dem Winkel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 0$ ab. Stein und Birne können als Massenpunkte angesehen werden. Es wirke die Erdbeschleunigung g.

Geg.: b, h, l, g, m_S, m_B

a) Wie groß muss der Abwurfwinkel α sein, damit der Stein die Birne trifft?

b) Welche Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist mindestens erforderlich, damit der Zusammenstoß noch über dem Boden stattfindet?

c) Im Folgenden gelte $m_S = m_B = m$ sowie die vorgegebene Anfangsgeschwindigkeit $v_0^* > v_0$. Welchen Geschwindigkeitsvektor $\bar{\boldsymbol{v}}_B$ hat die Birne nach dem Stoß, wenn der Stein in der Birne stecken bleibt?

Hinweis zu Aufgabenteil b): $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Gesucht: α, sodass Stein die Birne trifft:
Kinematik:

- Stein:

$$\ddot{x}_S = 0 \qquad \dot{x}_S = v_0 \cos\alpha \qquad x_S = v_0 \cos\alpha\, t$$
$$\ddot{y}_S = -g \qquad \dot{y}_S = -g\,t - v_0 \sin\alpha \qquad y_S = -\frac{1}{2} g\, t^2 - v_0 \sin\alpha\, t + h$$

- Birne:

$$\ddot{x}_B = 0 \qquad \dot{x}_B = 0 \qquad x_B = l \quad \text{(wird nicht benötigt)}$$
$$\ddot{y}_B = -g \qquad \dot{y}_B = -g\,t \qquad y_B = -\frac{1}{2} g\, t^2 + b$$

Zeitpunkt T, an dem Stein Flugbahn der Birne erreicht:

$$x_S \overset{!}{=} l \quad \Rightarrow \quad v_0 \cos\alpha\, T = l \quad \Rightarrow \quad T = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}$$

Winkel α, damit $y_B(T) = y_S(T)$:

$$y_S(T) = y_B(T)$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} g\, T^2 - \sin\alpha\, v_0\, T + h = -\frac{1}{2} g\, T^2 + b$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{h-b}{l}$$

b) Gesucht: $\min v_0$, sodass Zusammenstoß zum Zeitpunkt T über dem Boden:

$$y_B(T) = -\frac{1}{2} g\, T^2 + b \overset{!}{>} 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2} g\, T^2$$

mit $T = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}$ folgt:

$$v_0 > \sqrt{\frac{g}{2b} \frac{l^2}{\cos^2\alpha}}$$

Hinweis:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{l^2}{l^2 + (h-b)^2}$$
$$\Rightarrow \quad v_0 > \sqrt{\frac{g}{2b}(l^2 + (h-b)^2)}$$

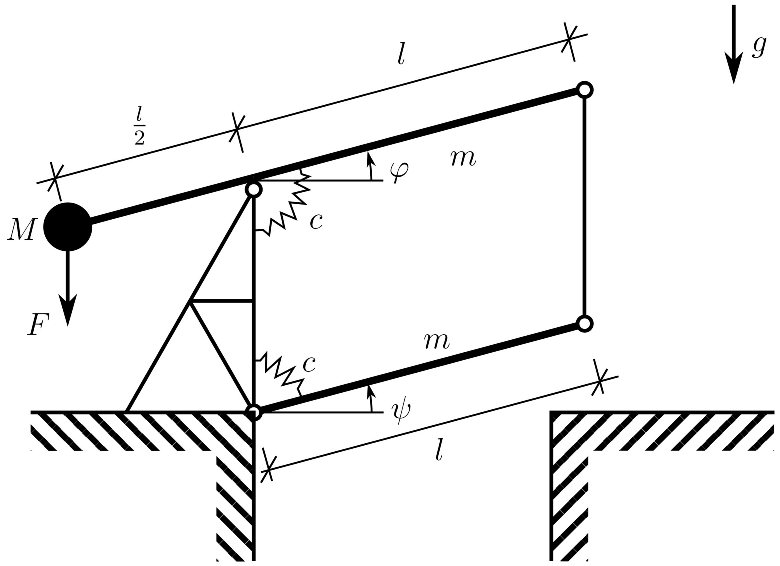
c) Gesucht: $\bar{\boldsymbol{v}}$ nach Stoß über Boden:
Vollplastischer Stoß:

$$e = 0 \Rightarrow \bar{\boldsymbol{v}}_S = \bar{\boldsymbol{v}}_B = \bar{\boldsymbol{v}}$$

Impulsbilanz:

$$m_S \boldsymbol{v}_S + m_B \boldsymbol{v}_B = (m_S + m_B)\bar{\boldsymbol{v}} \overset{m_S = m_B = m}{\Rightarrow} \bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_B)$$
$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha + 0 \\ -2gT - v_0^* \sin\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -\frac{2gl}{v_0^* \cos\alpha} - v_0^* \sin\alpha \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)



Die oben abgebildete Hubbrücke besteht aus einer Fahrbahn mit Masse m und Länge l. Die Fahrbahn ist über eine masselose, starre Stange mit einem Hebel (Masse m, Länge $\frac{3}{2}l$) verbunden. Am linken Ende des Hebels ist als Gegengewicht eine Punktmasse M befestigt. Zusätzlich wirkt dort eine Kraft F. Die Lage der Fahrbahn wird durch die Winkelkoordinate ψ beschrieben, die des Hebels durch φ. Fahrbahn und Hebel sind jeweils gelenkig durch eine Drehfeder der Federsteifigkeit c mit dem Fachwerk verbunden. Für $\psi = \varphi = 0$ sind die beiden Federn entspannt. Es wirke die Erdbeschleunigung g.

Geg.: M, m, c, l, F, g

a) Geben Sie die Abhängigkeit zwischen den Winkeln φ und ψ an, wenn für $\varphi = 0$ ebenfalls $\psi = 0$ ist (mit Begründung!).

b) Bestimmen Sie mithilfe der **synthetischen Methode** die Bewegungsgleichung des Systems.

c) Wie groß ist die Masse M in Abhängigkeit von m zu wählen, damit für $F = 0$ und $c = 0$ **jede** Lage in Ruhe ist?

d) Liniearisieren Sie die Bewegungsgleichung aus b) für die Annahme kleiner Winkel.

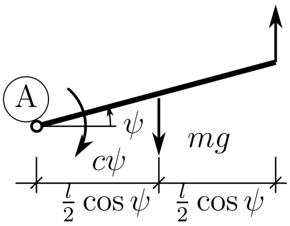
e) Bestimmen Sie die **allgemeine** Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung aus d). Hierbei müssen Sie keine Anfangswerte in die Lösung einsetzen.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Abhängigkeit φ und ψ: Stange starr $\rightarrow\ l\sin\varphi = l\sin\psi \ \Rightarrow\ \varphi=\psi$

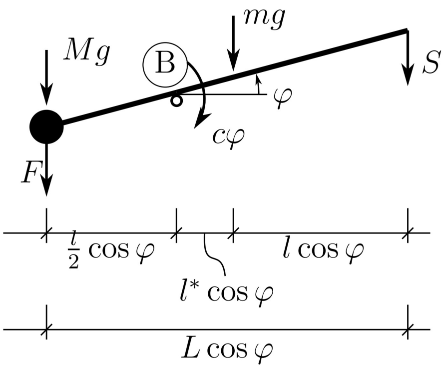
b) DGL mit synthetischer Methode:

Freischnitt Hubbrücke:



$$\sum M^A: \quad \Theta_A\ddot{\psi} = -c\psi - mg\frac{l}{2}\cos\psi + Sl\cos\psi \tag{1}$$

$$\text{mit } \Theta_A = \frac{1}{3}ml^2$$



NR: Hebelarm mg: $\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)L = \frac{1}{6}L = \frac{1}{6}\frac{3}{2}l = \frac{1}{4}l$

$$\sum M^B: \quad \Theta_B\ddot{\varphi} = -c\varphi + Mg\frac{l}{2}\cos\varphi + F\frac{l}{2}\cos\varphi - mg\frac{l}{4}\cos\varphi - Sl\cos\varphi \tag{2}$$

$$\text{mit } \Theta_B = \tfrac{1}{12}mL^2 + m\left(\tfrac{l}{4}\right)^2 + M\left(\tfrac{l}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(m+M\right)l^2$$

aus Gl. (**??**) mit Kinematik ($\varphi=\psi$) folgt:

$$Sl\cos\varphi = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + c\varphi + mg\frac{l}{2}\cos\varphi$$

in Gl. (**??**) einsetzen:

$$\frac{1}{4}(m+M)l^2\ddot{\varphi} + c\varphi - Mg\frac{l}{2}\cos\varphi - F\frac{l}{2}\cos\varphi + mg\frac{l}{4}\cos\varphi$$
$$+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + c\varphi + mg\frac{l}{2}\cos\varphi = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{7}{12}m + \frac{1}{4}M\right)l^2\ddot{\varphi} + 2c\varphi = \left(\frac{1}{2}Mg - \frac{3}{4}mg + \frac{1}{2}F\right)l\cos\varphi$$

c) M in Abhängigkeit von m für $F=0$, $c=0$ und System in Ruhe:

System in Ruhe $\rightarrow\ \ddot{\varphi}=0$

$$\left(\frac{1}{2}Mg - \frac{3}{4}mg\right)l\cos\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad M = \frac{3}{2}m$$

d) linearisierte DGL:

$$\cos\varphi \approx 1$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{7}{12}m + \frac{1}{4}M\right)l^2\ddot{\varphi} + 2c\varphi = \left(\frac{1}{2}Mg - \frac{3}{4}mg + \frac{1}{2}F\right)l$$

e) Allgemeine Lösung $\varphi(t) = \varphi_{\mathrm{H}}(t) + \varphi_{\mathrm{P}}(t)$

Homogene Lösung:

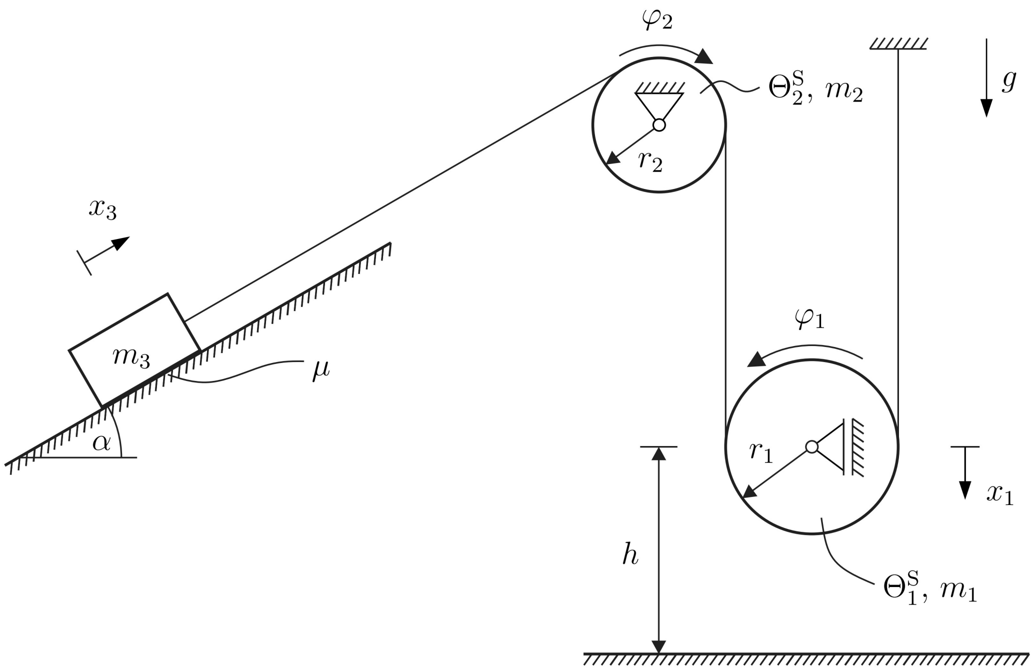
$$\varphi_{\mathrm{H}} = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$
$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{c}{(\frac{7}{24}m + \frac{1}{8}M)l^2}}$$

Partikuläre Lösung: Ansatz rechte Seite: $\varphi_{\mathrm{P}} = P = \text{const.} \quad \Rightarrow \ddot{\varphi}_{\mathrm{P}} = 0$

Einsetzen in lin. DGL:

$$2cP = \left(\frac{1}{2}Mg - \frac{3}{4}mg + \frac{1}{2}F\right)l \quad \Rightarrow P = \left(\frac{1}{4}Mg - \frac{3}{8}mg + \frac{1}{4}F\right)\frac{l}{c}$$

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte System besteht aus einer vertikal frei beweglichen Rolle 1 (m_1, Θ_1^S, r_1), einer gelenkig gelagerten Rolle 2 (m_2, Θ_2^S, r_2) und einer Masse m_3, die über ein masseloses, dehnstarres Seil wie abgebildet verbunden sind. Der Reibungskoeffizient zwischen der Masse m_3 und der schiefen Ebene ist μ. Das System befindet sich zu Beginn in Ruhe und der Mittelpunkt der Rolle 1 in einer Höhe h über dem Boden. Es wird angenommen, dass das Seil auf den Rollen nicht gleitet. Es wirke die Erdbeschleunigung g.

Geg.: m_1, m_2, m_3, Θ_1^S, Θ_2^S, r_1, r_2, α, μ, g, h

a) Geben Sie die kinematischen Beziehungen zwischen den Koordinaten x_1, φ_1, φ_2 und x_3 an.

b) Ermitteln Sie mithilfe des Arbeitssatzes die Geschwindigkeit, mit der die Rolle 1 auf dem Boden aufsetzt.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Kinematische Beziehungen:

$$r_1\,\dot\varphi_1 = \dot x_1 \quad\longrightarrow\quad \varphi_1 = \frac{x_1}{r_1}$$

$$r_2\,\dot\varphi_2 = 2\,r_1\,\dot\varphi_1 \quad\longrightarrow\quad r_2\,\varphi_2 = 2\,r_1\,\varphi_1 \quad\longrightarrow\quad \varphi_2 = 2\,\frac{x_1}{r_2}$$

$$\dot x_3 = r_2\,\dot\varphi_2 \quad\longrightarrow\quad x_3 = r_2\,\varphi_2 \quad\longrightarrow\quad x_3 = 2\,x_1$$

b) Arbeitssatz:

$$T_1 + V_1 + W\Big|_1^2 = T_2 + V_2 \qquad\qquad (*)$$

Anfangsbedingungen:

$$x_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = x_3 = 0$$
$$\dot x_1 = \dot\varphi_1 = \dot\varphi_2 = \dot x_3 = 0$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0 \\ T_2 &= \frac{1}{2}\,m_1\,\dot x_1^2 + \frac{1}{2}\,\Theta_1^{\mathrm{S}}\,\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\,\Theta_2^{\mathrm{S}}\,\dot\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\,m_3\,\dot x_3^2 \\ &\overset{\mathrm{a)}}{=} \left(\frac{1}{2}\,m_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Theta_1^{\mathrm{S}}}{r_1^2} + 2\,\frac{\Theta_2^{\mathrm{S}}}{r_2^2} + 2\,m_3\right)\dot x_1^2 \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= -m_1\,g\,(h - r_1) + 2\,m_3\,g\,(h - r_1)\sin\alpha \\ &= -\,(m_1 - 2\,m_3\sin\alpha)\,g\,(h - r_1) \end{aligned}$$

Arbeit der Nichtpotentialkräfte:

$$W\Big|_1^2 = -2\,\mu\,m_3\,g\,\cos\alpha\,(h - r_1)$$

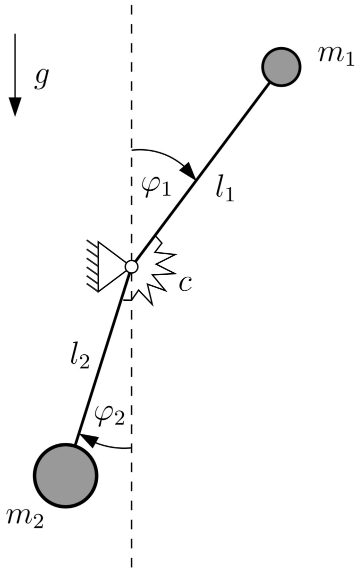
Einsetzen in $(*)$:

$$-2\,\mu\,m_3\,g\,\cos\alpha(h - r_1) = \left(\frac{1}{2}\,m_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Theta_1^{\mathrm{S}}}{r_1^2} + 2\,\frac{\Theta_2^{\mathrm{S}}}{r_2^2} + 2\,m_3\right)\dot x_1^2 - (m_1 - 2\,m_3\sin\alpha)\,g\,(h - r_1)$$

Auflösen:

$$\dot x_1 = \sqrt{\frac{(-2\,\mu\,m_3\,\cos\alpha + m_1 - 2\,m_3\,\sin\alpha)\,g\,(h - r_1)}{\frac{1}{2}\,m_1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Theta_1^{\mathrm{S}}}{r_1^2} + 2\,\frac{\Theta_2^{\mathrm{S}}}{r_2^2} + 2\,m_3}}$$

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei oben abgebildetes System aus zwei Massen m_1 und m_2, die an zwei masselosen Stangen der Längen l_1 und l_2 drehbar gelagert sind. Die Stangen sind mit einer Drehfeder der Steifigkeit c verbunden. Für $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ist die Feder entspannt. Es wirke die Erdbeschleunigung g.

Geg.: $m_1 = m$, $m_2 = \frac{27}{5}\,m$, $l_1 = l$, $l_2 = \frac{5}{6}\,l$, $c = \frac{3}{2}\,m\,g\,l$, g

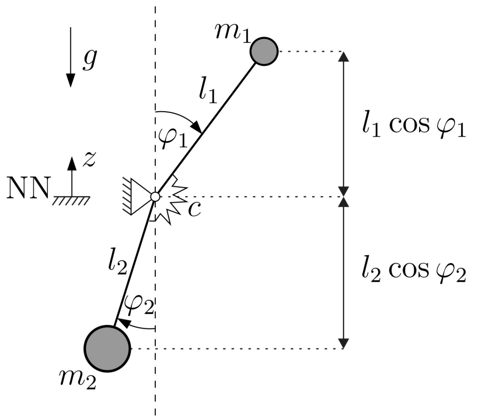
a) Bestimmen Sie für beliebige Winkel φ_1 und φ_2 die Bewegungsgleichungen des Systems mit der **analytischen Methode nach Lagrange**.

b) Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichungen für die Annahme kleiner Winkel ($|\varphi_1| \ll 1$ und $|\varphi_2| \ll 1$) und geben Sie diese in Matrix-Vektor-Schreibweise an.

c) Bestimmen Sie für die linearisierten Bewegungsgleichungen aus b) die Eigenkreisfrequenzen des Systems.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) System mit zwei Freiheitsgraden $\rightsquigarrow$ zwei Bewegungsgleichungen



- Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\, l_1^2\, \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, l_2^2\, \dot{\varphi}_2^2$$

- Potentielle Energie

$$V = m_1\, g\, l_1\, \cos\varphi_1 - m_2\, g\, l_2\, \cos\varphi_2 + \frac{1}{2}\, c\, (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

- Aufstellen der einzelnen Teile für die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = m_1\, l_1^2\, \ddot{\varphi}_1 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = m_2\, l_2^2\, \ddot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = -m_1\, g\, l_1\, \sin\varphi_1 - c\,(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = m_2\, g\, l_2\, \sin\varphi_2 + c\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

- Aufstellen der Lagrange-Gleichungen (keine Nichtpotentialkräfte!)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = 0$$

$$m_1\, l_1^2\, \ddot{\varphi}_1 + c\,(\varphi_1 - \varphi_2) - m_1\, g\, l_1\, \sin\varphi_1 = 0$$
$$m_2\, l_2^2\, \ddot{\varphi}_2 - c\,(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2\, g\, l_2\, \sin\varphi_2 = 0$$

$$l\, \ddot{\varphi}_1 + \frac{3}{2}\, g\,(\varphi_1 - \varphi_2) - g\, \sin\varphi_1 = 0$$
$$\frac{15}{4}\, l\, \ddot{\varphi}_2 - \frac{3}{2}\, g\,(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{9}{2}\, g\, \sin\varphi_2 = 0$$

b) Linearisierte Bewegungsgleichungen ($\sin\varphi_1 \approx \varphi_1$, $\sin\varphi_2 \approx \varphi_2$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} l \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} g & -\frac{3}{2} g \\ -\frac{3}{2} g & 6g \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

c) Charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M}) = 0$$

$$\frac{15}{4}\,l^2\,\omega^4 - \left(6 + \frac{15}{4}\,\frac{1}{2}\right)\,g\,l\,\omega^2 + \left(\frac{1}{2}\,6 - \frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\right)\,g^2 = 0$$

$$\frac{15}{4}\,l^2\,\omega^4 - \frac{63}{8}\,g\,l\,\omega^2 + \frac{3}{4}g^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\frac{63}{8} \pm \sqrt{(\frac{63}{8})^2 - 4\,\frac{15}{4}\,\frac{3}{4}}}{2\,\frac{15}{4}}\,\frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1^2 = 0.1\,\frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = 2\,\frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{0.1\,\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{2\,\frac{g}{l}}$$