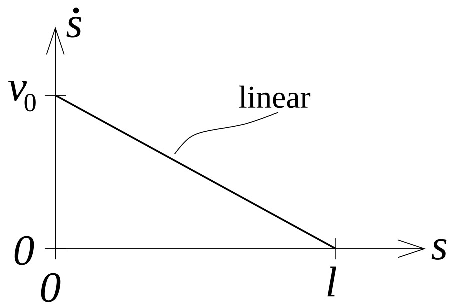
1. Aufgabe: (ca. 14 % der Gesamtpunkte)

Ein Punkt führt eine geradlinige Bewegung aus, bei der $\dot{s}(s)$ – d.h. die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Weg – durch das folgende Diagramm gegeben ist:



a) Bestimmen Sie $s(t)$.

b) Für welchen Wert von t ist $s(t) = l$?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Geradengleichung aus Diagramm

$$\dot{s}(s) = v_0 - \frac{v_0}{l}s = v_0(1 - \frac{s}{l})$$
$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

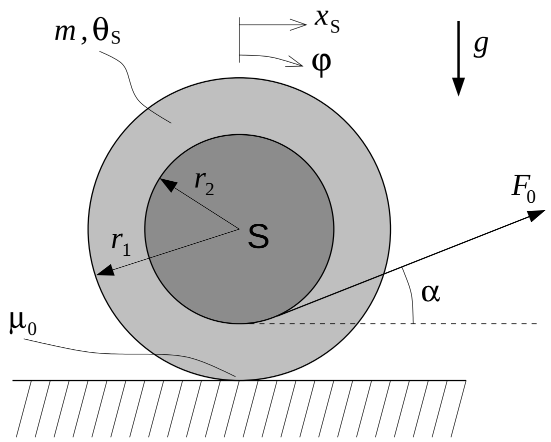
Trennung der Veränderlichen $\bar{s} \leftrightarrow \bar{t}$ liefert

$$\int_0^s \frac{1}{1 - \frac{\bar{s}}{l}} d\bar{s} = \int_0^t v_0 d\bar{t}$$
$$-l \cdot \ln(1 - \frac{\bar{s}}{l})|_0^s = v_0\bar{t}|_0^t$$
$$1 - \frac{s}{l} = e^{-\frac{v_0}{l}t}$$
$$\Rightarrow s(t) = l(1 - e^{-\frac{v_0}{l}t})$$

b)

$$s(t \to \infty) = l(1 - e^{-\infty}) = l$$

2. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Eine auf einer rauhen Ebene ruhende Seiltrommel (Masse m, Massenträgheitsmoment θ_S) wird in Bewegung gesetzt, indem am Seil unter dem Winkel α mit der konstanten Kraft F_0 gezogen wird.

a) Schneiden Sie das System frei (Freikörperbild).

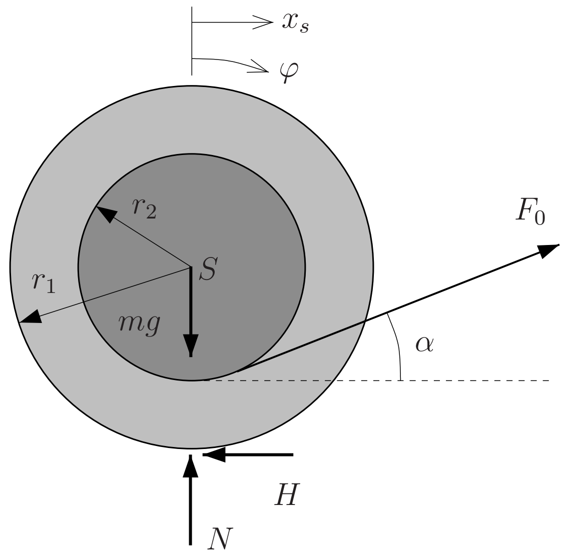
b) Bestimmen Sie die Beschleunigung a_s des Schwerpunktes S, wenn die Trommel rollt.

c) Wie groß muss dafür der Haftkoeffizient μ_0 sein?

Gegeben: m, θ_S, F_0, r_1, r_2, α, g

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Freikörperbild



b) Kräfte- und Momentenansatz

$$ma_s = F_0 \cos(\alpha) - H \tag{1}$$
$$0 = N - mg + F_0 \sin\alpha \tag{2}$$
$$\Theta_s \ddot{\varphi} = r_1 H - r_2 F_0 \tag{3}$$

Kinematik

$$x_s = r_1 \varphi, \qquad v_s = r_1 \dot{\varphi} \qquad a_s = r_1 \ddot{\varphi}$$

Schwerpunktbeschleunigung

$$a_s = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\alpha) - \frac{r_2}{r_1}}{1 + \frac{\Theta_s}{r_1^2 m}}$$

c) Damit kein Rutschen auftritt, muss gelten $H \leq \mu_0 N$.
Daraus folgt

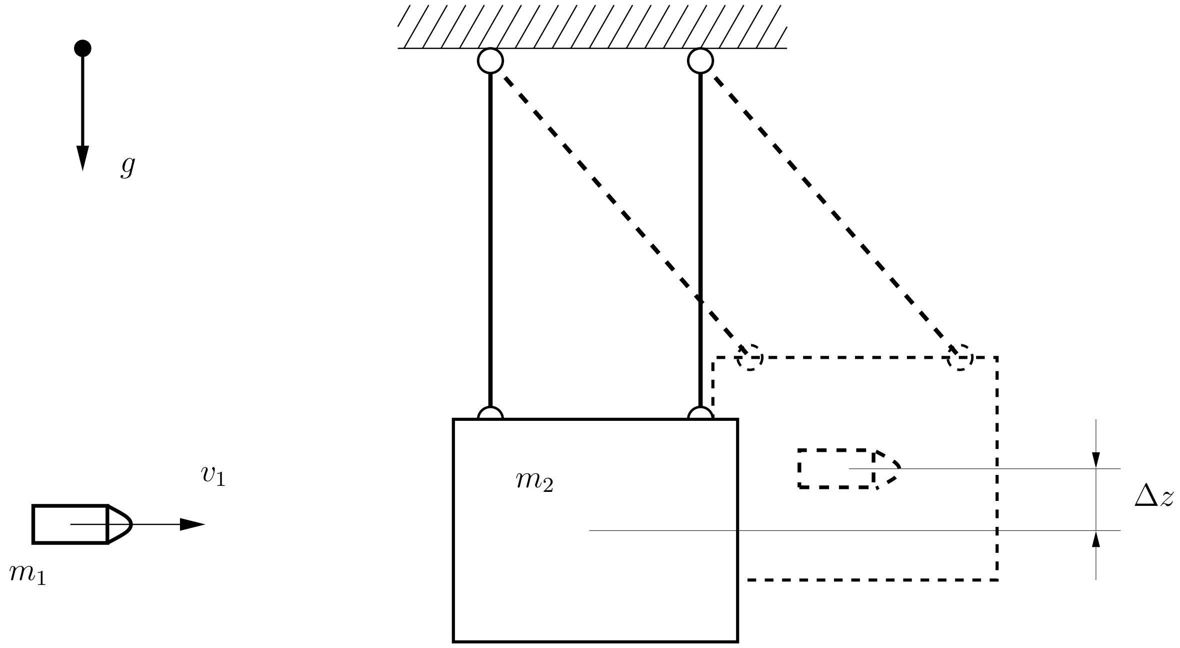
aus (1), (3) $\qquad H = F_0 \dfrac{\frac{\Theta_s \cos(\alpha)}{r_1^2 m} + \frac{r_2}{r_1}}{1 + \frac{\Theta_s}{r_1^2 m}}$

aus (2) $\qquad N = mg - F_0 \sin(\alpha)$

Einsetzen liefert

$$\mu_0 \geq \frac{\frac{\Theta_s \cos(\alpha)}{r_1^2 m} + \frac{r_2}{r_1}}{(\frac{mg}{F_0} - \sin(\alpha))(1 + \frac{\Theta_s}{r_1^2 m})}$$

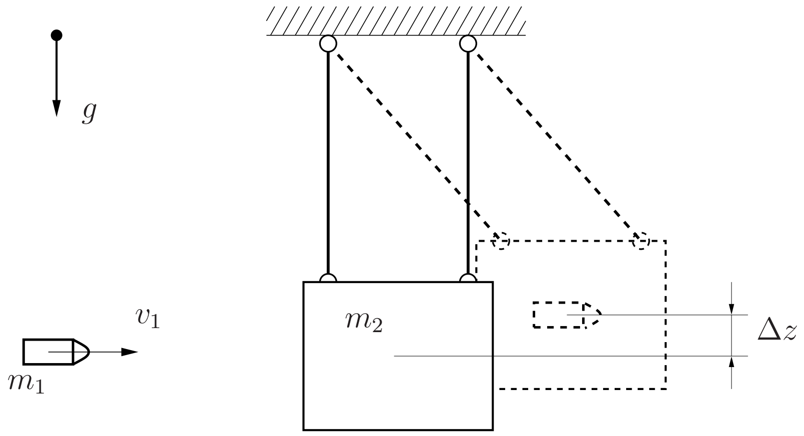
3. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Zur Messung der Geschwindigkeit eines Geschosses (m_1) wird das in der oberen Abbildung dargestellte ballistische Pendel verwendet. Das Geschoss dringt mit einer Geschwindigkeit v_1 in das Pendel (m_2) ein und bleibt stecken (vollplastischer Stoß). Dabei bewegt sich das System um eine Höhe Δz nach oben. Aus dieser Höhendifferenz soll nun die Geschossgeschwindigkeit (v_1) ermittelt werden.

Gegeben: m_1, m_2, g, Δz

Musterlösung - Aufgabe 3



- Stoßgesetz:

$$\epsilon = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{v_1 - v_2} \qquad |\,\text{plastischer Stoß:}\, \varepsilon = 0$$
$$\Rightarrow \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$

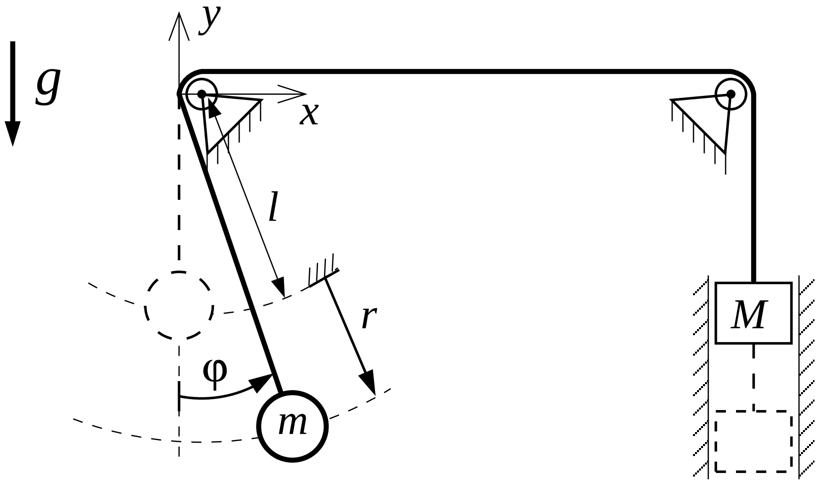
- Impulserhaltung

$$m_1\, v_1 + m_2\, v_2 = m_1\, \bar{v}_1 + m_2\, \bar{v}_2 \qquad |\, v_2 = 0, \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\, \bar{v}_2 \tag{1}$$

- Energieerhaltung nach dem Stoß

$$E_{kin}^{Stoß} + E_{pot}^{Stoß} = E_{kin}^{\Delta z} + E_{pot}^{\Delta z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,\bar{v}_2^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)\, g\,\Delta z$$
$$\Leftrightarrow \bar{v}_2 = \sqrt{2\,g\,\Delta z} \qquad |\,\text{in}\,(1)$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2\,g\,\Delta z}$$

4. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Das oben abgebildete System bestehend aus zwei Massen m und M, die über ein masseloses starres Seil verbunden sind, besitzt zwei Freiheitsgrade. Das Seil ist reibungsfrei über zwei Rollen geführt.

a) Stellen Sie den Orts- und den Geschwindigkeitsvektor der Masse m im skizzierten x-y-Koordinatensystem auf.

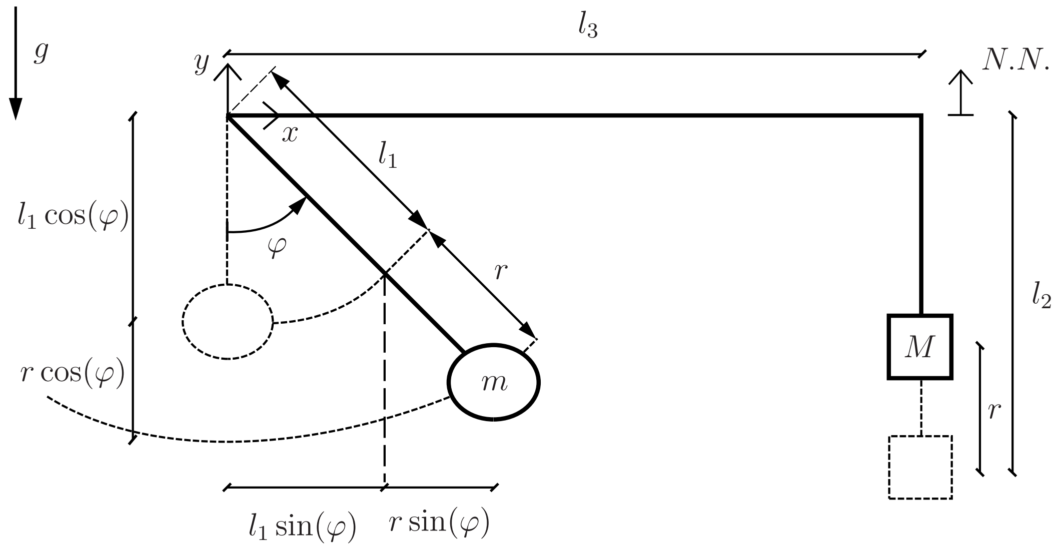
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit der Methode nach Lagrange in den gegebenen Koordinaten r und φ auf.

Gegeben: $g,\ l,\ m,\ M$

Hinweis: Andere Lösungswege als die Methode nach Lagrange werden nicht bewertet.

Musterlösung - Aufgabe 4

System in ausgelenkter Lage



a) Orts- und Geschwindigkeitsvektor von m

$$\vec{r}_m = \begin{pmatrix} l_1\sin(\varphi) + r\sin(\varphi) \\ -l_1\cos(\varphi) - r\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}_m = \begin{pmatrix} l_1\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ l_1\sin(\varphi)\dot{\varphi} - \dot{r}\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}|\dot{\vec{r}}_m|^2 =& [(l_1+r)\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\sin(\varphi)]^2 + [(l_1+r)\sin(\varphi)\dot{\varphi} - \dot{r}\cos(\varphi)]^2 \\ =& (l_1+r)^2\cos^2(\varphi)\dot{\varphi} + 2(l_1+r)\dot{r}\dot{\varphi}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \dot{r}^2\sin^2(\varphi) \\ &+ (l_1+r)^2\sin^2(\varphi)\dot{\varphi} - 2(l_1+r)\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \dot{r}^2\cos^2(\varphi) \\ =& (l_1+r)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\end{aligned}$$

Ortsvektor zu M:

$$\vec{r}_M = \begin{pmatrix} l_3 \\ -l_2 + r \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r} \end{pmatrix} \qquad |\dot{\vec{r}}_M|^2 = \dot{r}^2$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (l_1+r)^2\dot{\varphi}^2)$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned}V &= (-l_1 - r)\cos(\varphi)mg + (-l_2 + r)Mg \\ &= Mgr - mgr\cos(\varphi) - l_1 mg\cos(\varphi) - l_2 Mg\end{aligned}$$

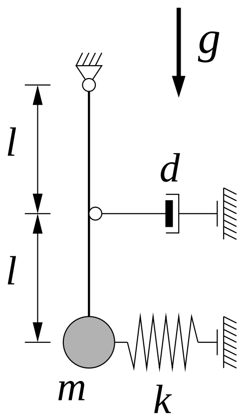
Äußere Kräfte: $\rightarrow$ Keine äußeren Kräfte $\Rightarrow Q_k^* = 0$

LAGRANGE-Gleicheichung:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}) &= \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m2(l_1+r)^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(m(l_1+r)^2\dot{\varphi}) \\
&= m(l_1+r)^2\ddot{\varphi} + 2m(l_1+r)\dot{r}\dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}) &= (m+M)\ddot{r} \\
\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{2}m2(l_1+r)\dot{\varphi}^2 = m(l_1+r)\dot{\varphi}^2 \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= mgr\sin(\varphi) + l_1 mg\sin(\varphi) \\
\frac{\partial V}{\partial r} &= Mg - mg\cos(\varphi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0: &\qquad m(l_1+r)^2\ddot{\varphi} + 2m(l_1+r)\dot{r}\dot{\varphi} + (l_1+r)mg\sin(\varphi) = 0 \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0: &\qquad (m+M)\ddot{r} - m(l_1+r)\dot{\varphi}^2 + Mg - mg\cos(\varphi) = 0
\end{aligned}
$$

5. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



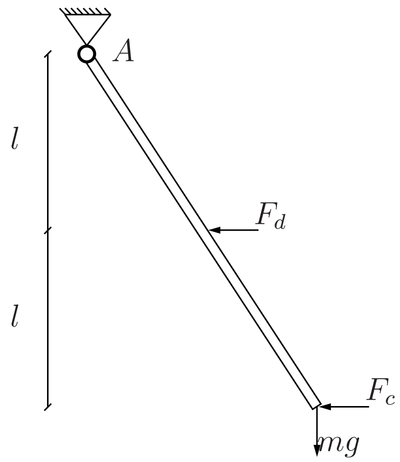
An einer masselosen Stange der Länge $2l$ ist eine Punktmasse m befestigt.

a) Wie groß darf d sein, damit das System im Erdschwerefeld schwingt (kleine Ausschläge)?

b) Wie groß muss der Dämpfungsgrad D gewählt werden, damit nach 10 Vollschwingungen die Amplitude auf $\frac{1}{10}$ ihres Anfangswertes abgefallen ist und wie groß ist dann die Schwingungsdauer?

Gegeben: g, k, l, m.

Musterlösung - Aufgabe 5 Freischnitt



a) Drallsatz

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = -F_d l - F_c 2l - mg2l\varphi$$

Mit

$$\Theta_A = m(2l)^2, \qquad F_d = dl\dot{\varphi}, \qquad F_c = c2l\varphi$$

folgt

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$
$$\delta = \frac{d}{8m}, \qquad \omega^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{2l}$$

Da Schwingung nur für $\delta < \omega$ folgt

$$\frac{d}{8m} < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{g}{2l}} \qquad \rightarrow \qquad d < 8\sqrt{cm + \frac{gm^2}{2l}}$$

b) Durch $x_{n+10} = \frac{x_n}{10}$ folgt

$$10\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln\frac{x_n}{x_{n+10}} = \ln 10 \qquad \rightarrow \qquad D = \sqrt{\frac{1}{(\frac{20\pi}{\ln 10})^2 + 1}} \approx 0,0366$$

Für T_d folgt

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-D^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2ml}{2cl + gm}}$$