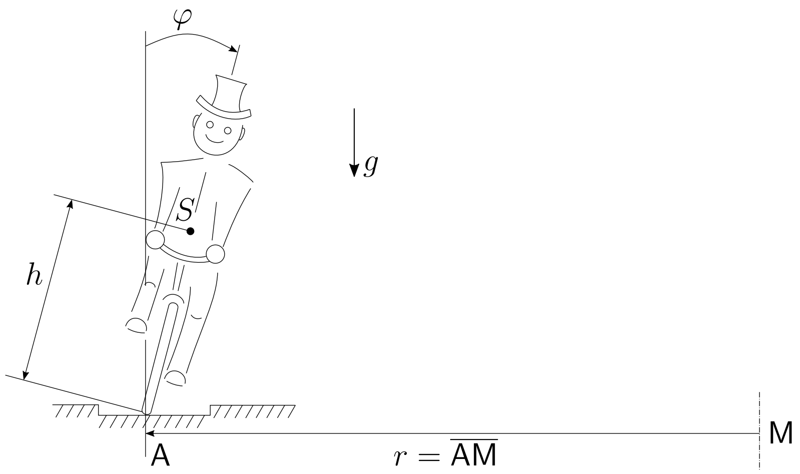
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Modulprüfung
Dynamik
24. August 2022

1. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Ein Radfahrer durchfährt mit konstanter Bahngeschwindigkeit v_s eine Kurve vom Radius $r = \overline{\mathsf{AM}}$ ohne zu rutschen. Die Straße bildet eine horizontale Ebene. Radfahrer und Fahrrad können als ein starrer Körper mit der Masse m und dem Schwerpunkt S angesehen werden. v_s ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S.

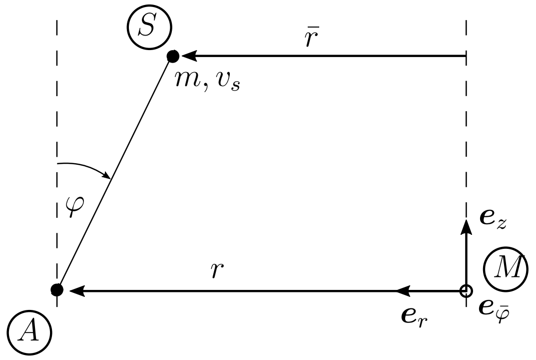
a) Welche Beziehung besteht zwischen v_s und φ, wenn Fliehkräfte und Erdschwere im Gleichgewicht sind?

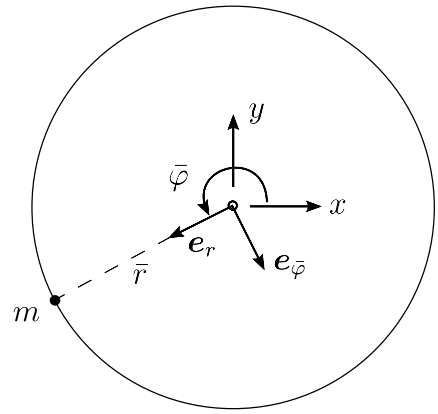
b) Wie groß muss der Haftkoeffizient μ_0 mindestens sein, damit das Fahrrad in A nicht wegrutscht?

Gegeben: m, h, v_s, r, g

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Kinematik:





$$\bar{r} = r - \sin\varphi \cdot h$$

$$r = konst \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$
$$\dot{\bar{\varphi}} = konst \quad \Rightarrow \quad \ddot{\bar{\varphi}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \underbrace{\bar{r}\,\dot{\bar{\varphi}}}_{=v_s}\,\boldsymbol{e}_{\bar{\varphi}} \qquad \boldsymbol{a} = \underbrace{-\bar{r}\,\dot{\bar{\varphi}}^2}_{a_r}\,\boldsymbol{e}_r \qquad \Rightarrow \quad a_r = -\frac{v_s^2}{\bar{r}}$$

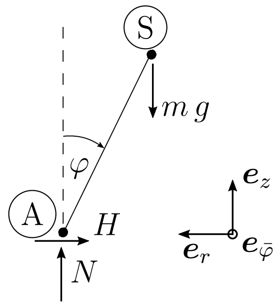
Kinetik:

$$\Sigma F_{ir} = m\,a_r \;: \qquad H = m\frac{v_s^2}{\bar{r}} \qquad \text{I}$$

$$\Sigma F_{iz} = m\,a_z \;: \qquad N = mg \qquad \text{II}$$

$$\Sigma M_{i\bar{\varphi}}^{\text{S}} = \theta^S \ddot{\varphi} \;: \qquad H\cos\varphi\,h = N\sin\varphi\,h \qquad \text{III}$$

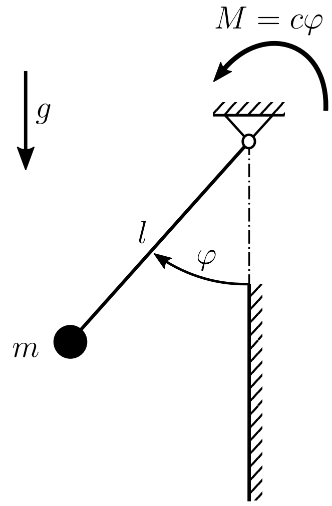
I und II in III $: v_s^2 = g\bar{r}\tan\varphi = g(r - h\sin\varphi)\tan\varphi$



b) Haften:

$$H \leq \mu N$$
$$\Leftrightarrow \frac{m}{\bar{r}}\,v_s^2 \leq \mu\,m\,g$$
$$\Rightarrow \; \mu_{\min} \geq \frac{v_s^2}{g\,\bar{r}}$$

2. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Mittels einer Abrissbirne wird gegen eine Wand geschlagen. Obiges Bild skizziert in stark vereinfachter Weise diesen Vorgang. Die Abrissbirne wird durch einen Massenpunkt der Masse m an einer starren, massenlosen Stange der Länge l modelliert. Beim **ersten** Herabfallen wird die Abrissbirne zusätzlich mit einem Moment $M = c\varphi$ beschleunigt. Die Bewegung erfolgt um ein reibungsfreies Lager. Sie startet aus der Ruhe heraus mit dem Anfangswinkel φ_0.

a) Berechnen Sie die Auftreffgeschwindigkeit v mithilfe des Arbeitssatzes.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Masse der Wand sehr viel größer als die Masse m des Massepunktes (bzw. der Abrissbirne) ist.

b) Gegeben ist die Stoßzahl e. Wie groß ist in Abhängigkeit von der Auftreffgeschwindigkeit v die Geschwindigkeit $\bar{v}$ des Massenpunktes nach dem Stoß?

c) Die Stoßzahl e sei nun unbekannt, anstelle dessen ist die maximale Auslenkung nach dem Stoß φ_1 gemessen worden. Geben Sie die Stoßzahl e in Abhängigkeit von φ_0 und φ_1 an.

d) Berechnen Sie den Energieverlust ΔE des Systems durch den Stoß.

Gegeben: φ_0, c, m, l, g

Musterlösung - Aufgabe 2

a) NN im Lager

$$V_0 = -mg\cos\varphi_0\, l \qquad\qquad T_0 = 0 \quad \text{(aus Ruhe)}$$

$$V_1 = -mgl \qquad\qquad T_1 = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 \quad \text{(kurz vor Aufprall)}$$

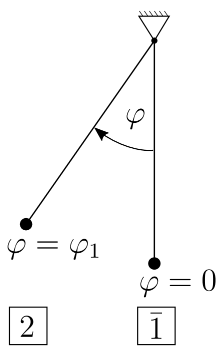
$$W\Big|_0^1 = \int\limits_{\varphi_0=\varphi_0}^{\varphi_1=0} c\,\varphi\,(-\,\mathrm{d}\varphi) = -\frac{1}{2}\,c\,\varphi^2\,\Big|_{\varphi_0}^{0} = \frac{1}{2}\,c\,\varphi_0^2$$

$$\Rightarrow \quad V_0 + T_0 + W\Big|_0^1 = V_1 + T_1 \qquad \Leftrightarrow \quad v_1^2 = 2\left[g\,l\,(1-\cos\varphi_0) + \frac{1}{2}\frac{c}{m}\,\varphi_0^2\right] \quad (*)$$

b) Stoß mit Ebene, da $m_{\text{Wand}} >> m$: $\quad \bar{v} = -e\,v \;\Leftrightarrow\; e = -\dfrac{\bar{v}}{v}$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}_1 = -e\,v_1 \text{ mit } v_1 \text{ von } (*)$$

c) Stoßzahl e



$$V_{\bar{1}} = -mgl \qquad\qquad V_2 = -mgl\,\cos\varphi_1$$

$$T_{\bar{1}} = \frac{1}{2}\,m\,\bar{v}_1^2 = \frac{1}{2}\,m(-e\,v_1)^2 \qquad\qquad T_2 = 0$$

$$W\Big|_{\bar{1}}^2 = 0 \quad \text{(entfällt, da M nur in Abwärtsbewegung existiert)}$$

$$\Rightarrow \quad V_{\bar{1}} + T_{\bar{1}} + W\Big|_{\bar{1}}^2 = V_2 + T_2$$

$$\Leftrightarrow \quad e^2 = \frac{2}{v_{\bar{1}}^2}\,[gl(1-\cos\varphi_1)]$$

d) Energieverlust beispielsweise via Änderung der kinetischen Energie infolge Stoß

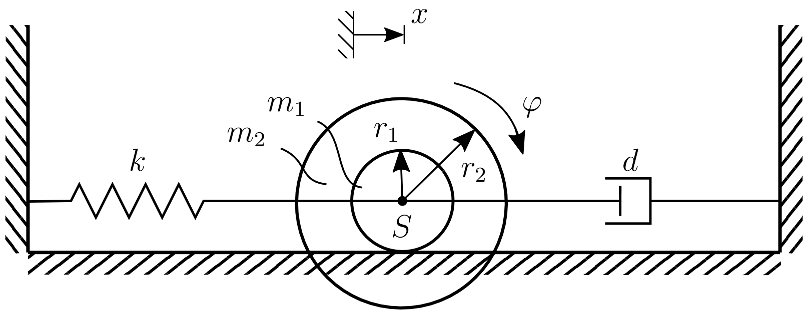
$$T_1 = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 \qquad V_1 = 0$$

$$T_{\bar{1}} = \frac{1}{2}\,m\,\bar{v}_1^2 \qquad V_{\bar{1}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_1 + T_1 = V_{\bar{1}} + T_{\bar{1}} + \Delta E$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta E = m\,g\,l\,(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0) + \frac{1}{2}c\,\varphi_0^2$$

3. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



Eine kreiszylindrische Walze (Masse m_2, Radius r_2) ist fest mit einem kreiszylindrischen Zapfen (Masse m_1, Radius r_1) verbunden. Der gesamte Körper rollt mit dem Zapfen auf einer horizontalen Führung ohne zu gleiten. In seinem Schwerpunkt sind eine Feder (Federsteifigkeit k) und ein Dämpfer (Dämpfungskonstante d) befestigt. Die Bewegung wird durch die Koordinate x und den Winkel φ beschrieben. Für $x = 0$ sei $\varphi = 0$ und die Feder entspannt.

a) Schneiden Sie das System in allgemeiner Lage frei und geben Sie φ in Abhängigkeit von x an.

b) Stellen Sie mit Hilfe der *synthetischen Methode* (Freischneiden) die Bewegungsgleichung in x auf.

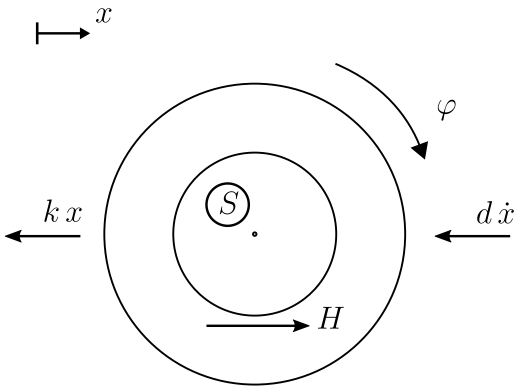
c) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des Systems.

Gegeben: m_1, m_2, r_1, r_2, k, d

Hinweis: Lösungen mit anderen Methoden als der synthetischen werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Freischnitt:



Kinematik:
$\dot{x} = r_1 \dot{\varphi}$
$\Rightarrow \quad x = r_1 \varphi$

b) Bewegungsgleichung:

$$\Sigma F_{ix} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x} : \qquad -k\,x - d\,\dot{x} + H = (m_1 + m_2)\,\ddot{x}$$

$$\Sigma M_i^S = \theta^S \ddot{\varphi} : \qquad -H r_1 = \theta^S \frac{\ddot{x}}{r_1} \qquad \text{mit} \quad \theta^S = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

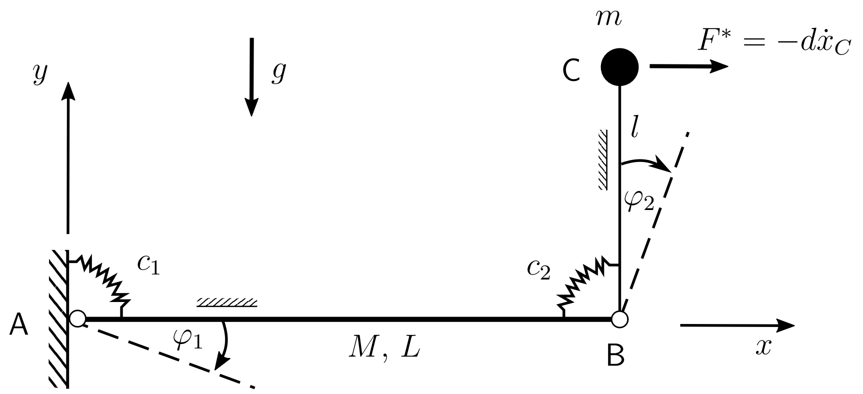
$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{d\,r_1^2}{\theta^M}}_{=2\,\delta} \dot{x} + \underbrace{\frac{k\,r_1^2}{\theta^M}}_{=\omega_0^2} x = 0 \qquad \text{mit} \quad \theta^M = \frac{3}{2}\, m_1\, r_1^2 + m_2 \left(\frac{1}{2}\, r_2^2 + r_1^2\right)$$

c) Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_0^2 = \frac{k\,r_1^2}{\theta^M} \qquad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d\,r_1}{2\sqrt{k\,\theta^M}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} = r_1 \sqrt{\frac{k}{\theta^M} - \frac{d^2\,r_1^2}{4\,(\theta^M)^2}}$$

4. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Ein homogener starrer Balken der Länge L mit verteilter Masse M ist in Punkt B über ein Gelenk und eine Drehfeder (Steifigkeit c_2) mit einem masselosen starren Stab der Länge l verbunden. Am Ende des Stabes (Punkt C) befindet sich eine Punktmasse m. Der Balken ist in A durch eine Drehfeder der Steifigkeit c_1 gelagert. An der Punktmasse in C greift eine Nichtpotentialkraft der Größe $\boldsymbol{F}^* = -d\dot{x}_C\boldsymbol{e}_x$ an, die stets in horizontaler Richtung wirkt. Die Bewegung des Systems wird durch die Absolutkoordinaten φ_1 und φ_2 bezüglich der Horizontalen bzw. der Vertikalen beschrieben.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen sind folgende Aufgabenteile zu bearbeiten:

a) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$ zum Schwerpunkt des Balkens und $\boldsymbol{r}_2$ zur Punktmasse m im gegebenen x-y-Koordinatensystem für eine allgemeine ausgelenkte Lage und geben Sie die Anzahl der Freiheitsgrade an.

b) Bestimmen Sie die generalisierten Nichtpotentialkräfte $\mathbf{Q}_k^*$.

c) Bestimmen Sie die kinetische Energie unter Verwendung der in φ_1 und φ_2 linearisierten Ortsvektoren.

d) Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems. Verwenden Sie hierfür die Näherungen für kleine Auslenkungen.

$$\sin\varphi = \varphi\,, \quad \cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

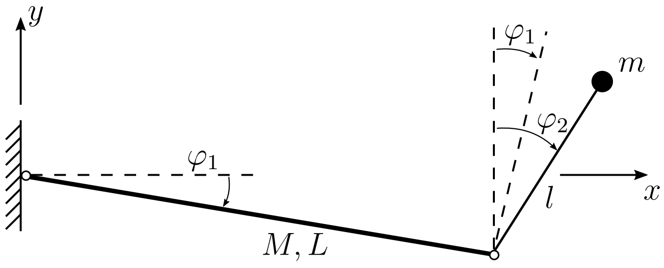
e) Stellen Sie mit Hilfe der *Methode nach Lagrange* die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen ($|\varphi_1|, |\varphi_2| \ll 1$) auf.

Gegeben: M, L, m, l, c_1, c_2, g, d

Hinweis: Lösungen mit anderen Methoden als die Methode nach Lagrange werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Ortsvektoren für allgemeine ausgelenkte Lage:



$$\boldsymbol{r_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 \end{bmatrix} \frac{L}{2}$$

$$\boldsymbol{r_2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 \end{bmatrix} L + \begin{bmatrix} \sin\varphi_2 \\ \cos\varphi_2 \end{bmatrix} l$$

FHG: $2(\varphi_1, \varphi_2)$

b) Generalisierte Nichtpotentialkräfte:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -d\dot{x}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{x}_c = \dot{r}_{2x} = -\sin\varphi_1\dot{\varphi}_1 L + \cos\varphi_2\dot{\varphi}_2 l$$

$$Q_1^* = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_F}{\partial\,\varphi_1} \overset{r_F \widehat{=} r_2}{=} d\,\dot{x}_c\sin\varphi_1 L \qquad Q_2^* = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\,\boldsymbol{r}_F}{\partial\,\varphi_2} = -d\,\dot{x}_c\cos\varphi_2 l$$

c) Kinetische Energie (linearisierte Ortsvektoren):

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L \\ -\frac{1}{2}L\,\varphi_1 \end{bmatrix} \;\rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}L\,\dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} L + l\,\varphi_2 \\ -L\,\varphi_1 + l \end{bmatrix} \;\rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \begin{bmatrix} l\,\dot{\varphi}_2 \\ -L\,\dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\,\Theta^A\,\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{6}\,M\,L^2\,\dot{\varphi}_1^2 \qquad T_2 = \frac{1}{2}\,m\,|\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}|^2 = \frac{1}{2}\,m\,(l^2\,\dot{\varphi}_2^2 + L^2\,\dot{\varphi}_1^2)$$

d) Potentielle Energie (Ortsvektoren bis zum quadratischen Glied):

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}L\,(1-\frac{\varphi_1^2}{2}) \\ -\frac{1}{2}L\,\varphi_1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} L\,(1-\frac{\varphi_1^2}{2}) + l\,\varphi_2 \\ -L\,\varphi_1 + l\,(1-\frac{\varphi_2^2}{2}) \end{bmatrix}$$

$$V_{Lage} = M\,g\,\left(-\frac{1}{2}\,L\,\varphi_1\right) + m\,g\,\left(-L\,\varphi_1 + l\,\left(1-\frac{\varphi_2^2}{2}\right)\right) \qquad V_{Feder} = \frac{1}{2}\,c_1\,\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\,c_2\,(\varphi_2-\varphi_1)^2$$

e) Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = \left(\frac{1}{3}\,M\,L^2 + m\,L^2\right)\,\ddot{\varphi}_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial\varphi_1} = -\frac{1}{2}\,M\,g\,L - m\,g\,L + c_1\,\varphi_1 - c_2\,(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) = m\,l^2\,\ddot{\varphi}_2 \qquad \frac{\partial V}{\partial\varphi_2} = -m\,g\,l\,\varphi_2 + c_2\,(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_k} + \frac{\partial V}{\partial\varphi_k} = Q_k^*$$

$$\left(\frac{1}{3}\,M\,L^2 + m\,L^2\right)\,\ddot{\varphi}_1 + (c_1+c_2)\,\varphi_1 - c_2\,\varphi_2 - \frac{1}{2}\,M\,g\,L - m\,g\,L = Q_1^*$$

$$m\,l^2\,\ddot{\varphi}_2 - c_2\,\varphi_1 + (c_2 - m\,g\,l)\,\varphi_2 = Q_2^*$$