Modulprüfung in Technischer Mechanik
am 9. März 2016

# Dynamik

## Aufgaben

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: __________________ Fachrichtung: __________________

**Hinweise:**

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.

---

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | |

(Eintrag erfolgt durch Institut)

# 1. Aufgabe: (ca. 14 % der Gesamtpunkte)

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

a) ☐ Zwangskräfte wirken <u>senkrecht</u> zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

☐ Zwangskräfte wirken <u>tangential</u> zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

☐ Zwangskräfte wirken <u>unabhängig</u> von den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

b) ☐ Der Drallsatz für einen starren Körper ist aus dem Drallsatz für einen Massepunkt herleitbar.

☐ Der Drallsatz für einen starren Körper ist ein eigenständiges Postulat.

☐ Der Drallsatz für einen starren Körper ist aus dem Impulssatz (Schwerpunktsatz) für den starren Körper herleitbar.

c) ☐ Der Arbeitssatz für einen Massepunkt ist aus dem Newton'schen Bewegungsgesetz ableitbar.

☐ Der Arbeitssatz stellt ein eigenständiges Postulat dar.

☐ Der Arbeitssatz ist ein Sonderfall des Energieerhaltungssatzes.

d) Bei einer gedämpften Schwingung wird festgestellt, dass nach 10 Vollschwingungen die Amplitude auf $\frac{1}{10}$ ihres Anfangswertes abgefallen ist.

Bestimmen Sie das Lehr'sche Dämpfungsmaß $D$.

**Aufgabe 1**

a) Zwangskräfte wirken senkrecht zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

b) Der Drallsatz für einen starren Körper ist ein eigenständiges Postulat.

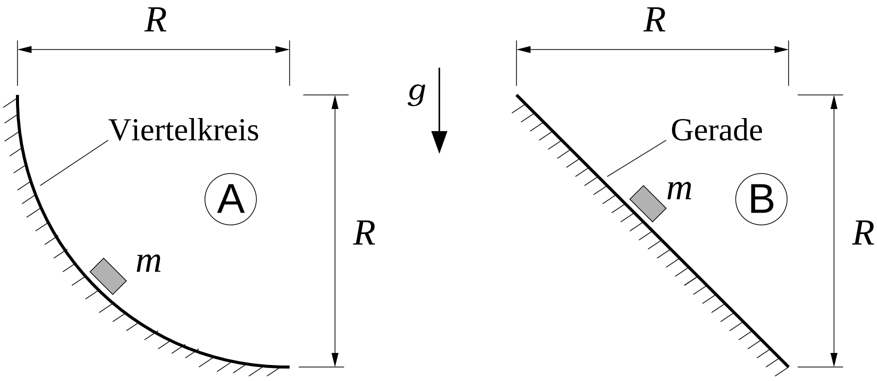
c) Der Arbeitssatz für einen Massepunkt ist aus dem Newtonschen Bewegungsgesetz ableitbar.

d) Lehr'sches Dämpfungsmaß

$$\frac{x_{max}}{x_{red}} = e^{-D\omega(t_0-(t_0+10T))} = e^{-D2\pi 10} = 10$$

$$D = \frac{\ln 10}{20\pi} = 0,0366$$

## 2. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)




Zwei gleich schwere Massepunkte ($m$) gleiten aus der Ruhe heraus reibungsfrei zwei Bahnen unterschiedlicher Geometrie hinab. Berechnen Sie

a) die Geschwindigkeiten $v_A$ und $v_B$ der beiden Massepunkte am Ende der Bahnen sowie

b) die Zeiten $t_A$ und $t_B$, welche die beiden Massepunkte für diese Bewegung benötigen.

c) Welcher Massepunkt kommt zuerst unten an?

Gegeben: $m$, $R = 10\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

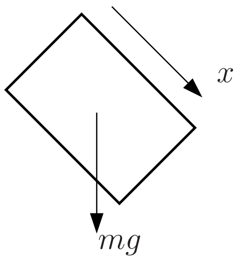
Hinweis: $$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}} \approx 2.62$$

**Aufgabe 2**

a)

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= mgR \\ T_1 &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow v_A = v_B = \sqrt{2gR} = 14,14\,\frac{m}{s}$$

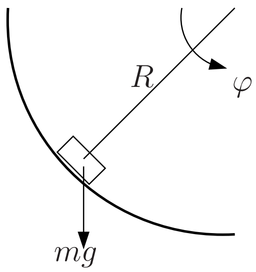
b) Gerade:




$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\cos(45°) \\ \ddot{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,g \\ \dot{x} &= \frac{g}{\sqrt{2}}\,t + \overbrace{\dot{x}_0}^{=0} = \frac{g}{\sqrt{2}}\,t \\ x &= \frac{g}{2\sqrt{2}}\,t^2 + \overbrace{x_0}^{=0} = \frac{g}{2\sqrt{2}}\,t^2 \end{aligned}$$

$$t_B = \sqrt{2\sqrt{2}\frac{1}{g}\sqrt{2}R} = \sqrt{4\frac{R}{g}} = 2,0\,s$$

Kreis:




$$\begin{aligned} R\ddot{\varphi} &= mg\cos\varphi \\ \underbrace{\ddot{\varphi}}_{\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}} &= \frac{g}{R}\cos\varphi \end{aligned}$$

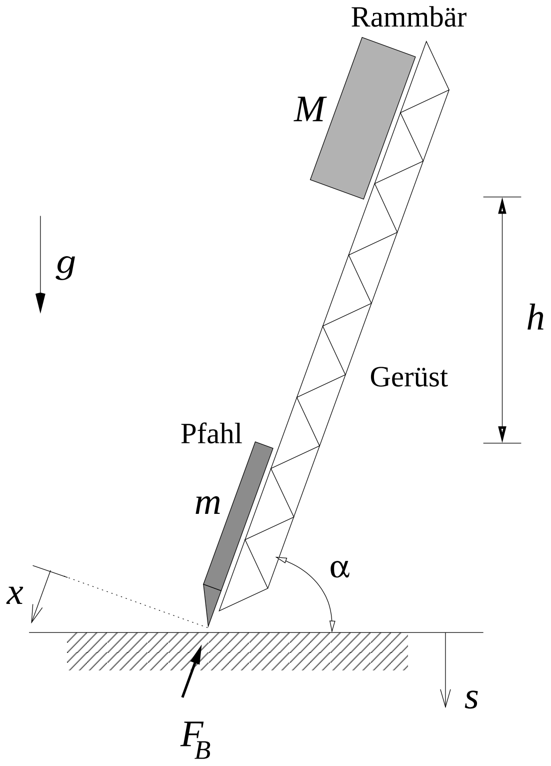
$$\int_0^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}\,d\dot{\varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{g}{R}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\,\varphi^2 = \frac{g}{R}\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{R}\sin\varphi}$$

$$t_A = \int_0^t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\frac{g}{R}}}\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\frac{g}{R}}}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\,d\varphi}_{=2,62206} = 1,894\,s$$

c) A (Kreisbahn) kommt zuerst an, da $t_A < t_B$, bzw. ohne Rechnung: in A größere Beschleunigung zu Beginn, daher früher im Endpunkt trotz längerem Weg

# 3. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)




Mit einem Rammbär (Masse $M$) wird ein Pfahl (Masse $m$) unter einem Winkel $\alpha$ in den Boden gerammt. Hierbei wird der Bär aus der Höhe $h$ losgelassen. Der anschließende Stoß erfolgt mit der Stoßzahl $e$, wobei für die nachfolgende Bewegung angenommen werden kann, dass keine weiteren Stöße erfolgen.
Beim Eindringen in den Boden wirkt dem Pfahl eine Kraft $F_B$ entgegen, die proportional zur Eindringtiefe $s$ ist:

$$F_B = c \cdot s$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Rammbärs unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit dem Pfahl.

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten des Bärs und des Pfahls nach dem Stoß an.

c) Wie groß ist der schräge Eindringweg $x$?

Gegeben: $h$, $m$, $M = 3m$, $\alpha = 60°$, $e = 0.2$, $c = 250\dfrac{m\,g}{h}$

<u>Hinweis:</u> Der Bär und der Pfahl bewegen sich auf dem Gerüst reibungsfrei.

**Aufgabe 3**

a)

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= Mgh \\ T_1 &= \frac{1}{2}Mv_1^2 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow\ v_1 = \sqrt{2gh}$$

b)

$$e = -\frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{v_1 - 0} \overset{!}{=} 0,2 \qquad \Leftrightarrow\ \overline{v}_2 = ev_1 + \overline{v}_1$$

$$\begin{aligned} M(\overline{v}_1 - v_1) + m(\overline{v}_2 - 0) &= 0 \\ \Rightarrow M\overline{v}_1 - Mv_1 + m(ev_1 + \overline{v}_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{v}_1 &= \frac{M - me}{M + m}\,v_1 = \frac{3 - 1\cdot 0,2}{4}\,v_1 = 0,7\sqrt{2gh} \\ \overline{v}_2 &= 0,2v_1 + 0,7v_1 = 0,9\sqrt{2gh} \end{aligned}$$

**oder** mit Formel:

$$\begin{aligned} \overline{v}_1 &= \frac{Mv_1 + m\cdot 0 - em(v_1 - 0)}{m + M} = \frac{3 - 0,2}{4}\,v_1 = 0,7v_1 \\ \overline{v}_2 &= \frac{Mv_1 + m\cdot 0 + eM(v_1 - 0)}{m + M} = \frac{3 + 0,2\cdot 3}{4}\,v_1 = 0,9v_1 \end{aligned}$$

c)

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m\overline{v}_2^2 \\ V_2 &= mgs \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow\ T_1 + V_2 - W\big|_1^2 = 0$$

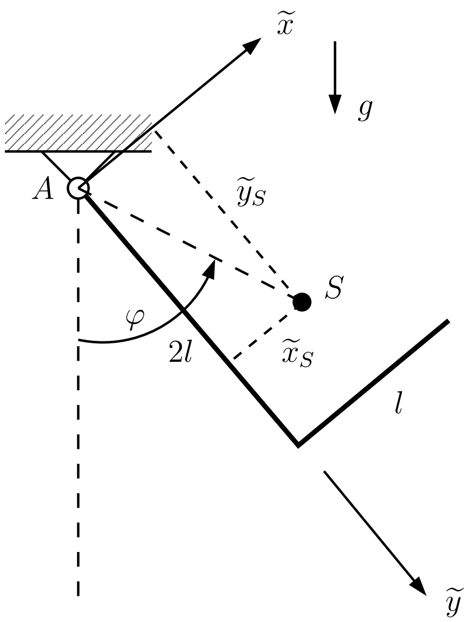
$$W\big|_1^2 = \int_0^x cs\,dx = \int_0^x c\underbrace{\sin(60^\circ)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}cx^2\big|_0^x$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}m(0,9v_1)^2 + mg\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}cx^2 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-mg\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{m^2g^2\frac{3}{4} + 4\frac{\sqrt{3}}{4}c\cdot 0,81\cdot\frac{1}{2}mv_1^2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}c} \qquad \left(c = 250\,\frac{mg}{h}\right) \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \mp \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{3}\cdot 0,81\cdot 250}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 250}\,h = \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{810}{\sqrt{3}}}\right)\frac{h}{250} \\ &= 0,09059\,h \quad (\text{oder } -0,08259\,h) \end{aligned}$$

# 4. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)




Ein Winkel vom Gewicht $G = mg$ besteht aus zwei dünnen homogenen Stäben. Er ist in $A$ durch eine senkrecht zur Zeichenebene stehende Achse gelagert.

a) Ermitteln Sie die Schwerpunktskoordinaten $\widetilde{x}_S$ und $\widetilde{y}_S$ des Winkels.

b) Ermitteln Sie das Massenträgheitsmoment des Winkels bezüglich Punkt $A$.

c) Ermitteln Sie die statische Ruhelage $\varphi^*$ des Systems.

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems in der Koordinate $\varphi$ auf.

Gegeben: $m$, $l$, $\varphi$, $g$

**Aufgabe 4**

a) Schwerpunkt

$$x_s = \frac{\frac{m}{3}\frac{l}{2}}{m} = \frac{l}{6} \quad y_s = \frac{\frac{m}{3}2l + \frac{2m}{3}l}{m} = \frac{4}{3}l$$

b) Massenträgheitsmoment

$$a = \sqrt{y_s^2 + x_s^2} = \frac{\sqrt{65}}{6}\,l$$

$$\Theta_A = \frac{m}{3}\left\{\frac{l^2}{12} + \left[(2l)^2 + (\frac{l}{2})^2\right]\right\} + \frac{2}{3}m\frac{(2l)^2}{3} = \frac{7}{3}ml^2$$

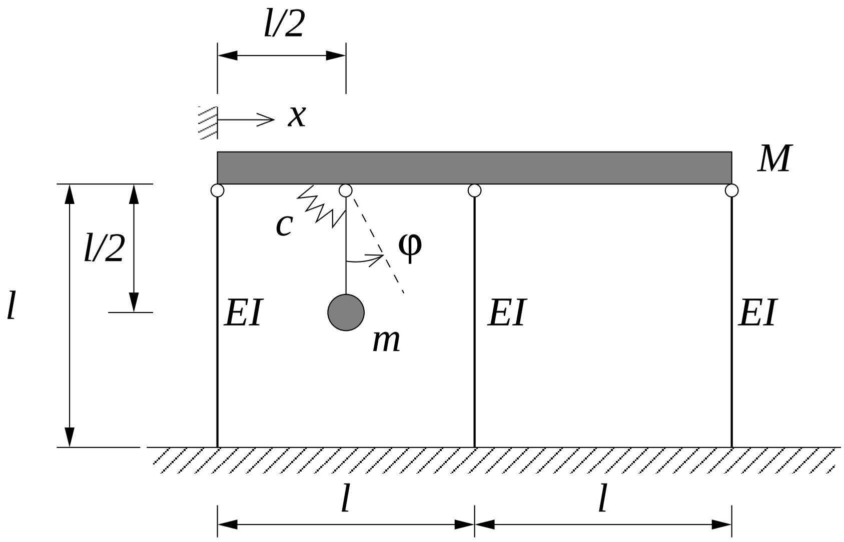
c) statische Ruhelage: $\varphi^* = 0$

d) reine Rotation um A $\Rightarrow$ Drallsatz

$$\Theta_A\ddot{\varphi} = M_A$$

$$\frac{7}{3}ml^2\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{65}}{14}\frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

# 5. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



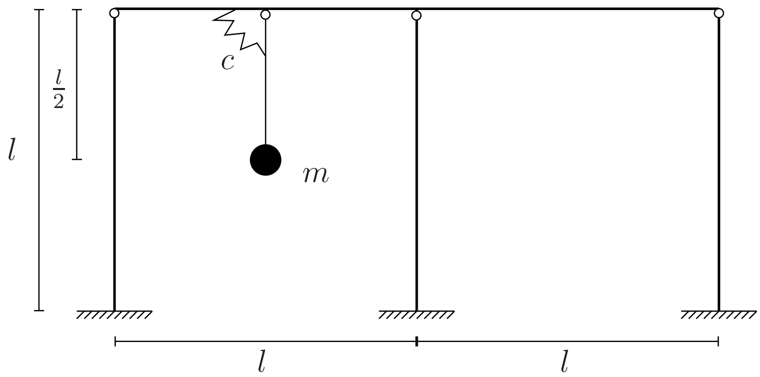

Das dargestellte System eines Rahmens mit einem eingehängten Pendel soll auf das Schwingungsverhalten *für kleine Auslenkungen* untersucht werden. Der Rahmen besteht aus einem Riegel der Masse $M$ und drei masselosen Stützen, die an einem Ende gelenkig verbunden und am anderen Ende eingespannt sind. Das Pendel besteht aus einer masselosen starren Stange der Länge $l/2$, einer Punktmasse $m$ und einer Drehfeder der Steifigkeit $c$.

a) Geben Sie die Ersatzfedersteifigkeit der drei Stützen an.

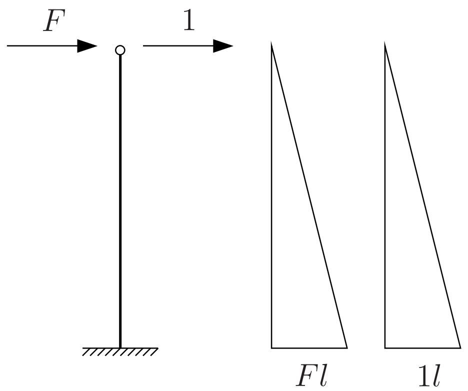
b) Bestimmen Sie mit der *analytischen Methode nach Lagrange* die Bewegungsgleichungen des Systems. Verwenden Sie hierzu die Koordinaten $x$ und $\varphi$. Der Einfluss der Erdbeschleunigung darf vernachlässigt werden.

Gegeben: $M$, $m$, $l$, $EI$, $c$.

**Aufgabe 5**

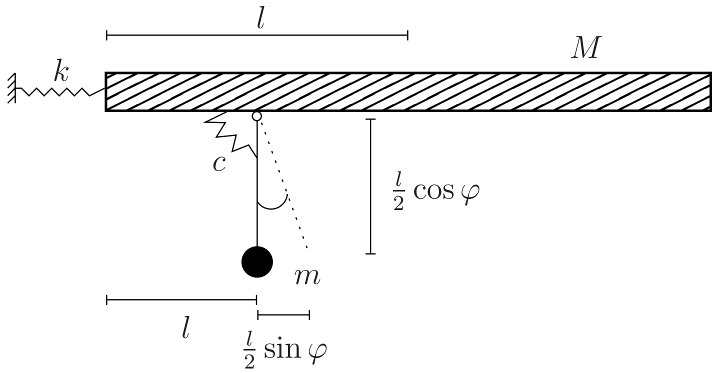



a) Ersatzfedern




$$f = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot Fl \cdot l \cdot l$$
$$= \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}$$
$$k = \frac{3EI}{l^3} \cdot 3 = \frac{9EI}{l^3}$$

b) Ersatzsystem




$$r_1 = \begin{bmatrix} x + l \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} x + \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sin\varphi \\ \frac{l}{2}\cos\varphi \end{bmatrix} \quad \overset{\varphi << 1}{\Rightarrow} \quad r_1 = \begin{bmatrix} x + l \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} x + \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\varphi \\ \frac{l}{2}\cos \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{r}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alternativ:

$$\dot{r}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ -\frac{l}{2}\sin\varphi\,\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
|\dot{r}_2|^2 &= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\dot{x} \\
&= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\dot{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2 \\
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi})^2}_{=\dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= M\dot{x} + m\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right) \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0 + m\frac{l}{2}\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right) \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= kx \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= c\varphi
\end{aligned}
$$

Lagrange:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \overbrace{\frac{\partial T}{\partial q_i}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \overbrace{Q_i}^{=0} \\
\Rightarrow \begin{bmatrix} M+m & m\frac{l}{2} \\ m\frac{l}{2} & m\frac{l^2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$