

# Stabilisierung unterintegrierter Finite Elemente und deren Einbau in FEAP-MEKA

Diplomarbeit von Andreas Ubert

## Problemstellung

Elemente werden weiterentwickelt, um ihre Leistungsfähigkeit zu verbessern. Insbesondere für Berechnungen mit großen Deformationen oder für inkompressibles Materialverhalten möchte man in kürzerer Zeit genauere Ergebnisse erhalten, wobei die Elemente auch bei stark verzerrter Vernetzung noch gute Ergebnisse liefern sollten.

Um den Berechnungsaufwand und damit die Berechnungskosten bei der numerischen Simulation zu senken, werden deshalb bevorzugt unterintegrierte Elemente verwendet. Das bedeutet, dass bei der numerischen Lösung der auftretenden Integrale weniger Integrationspunkte verwendet werden als für eine hinreichend gute Integration dieser Ordnung notwendig wären.

Bei der Unterintegration treten allerdings sogenannte Hourglass- bzw. Null-Energie-Moden auf. Das sind Elementverformungen, die keinen Beitrag zur Verzerrungsenergie leisten und deshalb eine Stabilisierung erforderlich machen.



## Zielsetzung

Durch geeignete Stabilisierungsmaßnahmen soll nun der bei der Unterintegration entstehende Rangabfall der Steifigkeitsmatrix, der zu den Hourglass-Moden führt, kompensiert und gleichzeitig die Versteifungseffekte eliminiert werden.

## Variationsformulierung

Ausgehend vom Hu-Washizu-Funktional

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \delta \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^T (\nabla^{(s)} \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \delta W_{ext} = 0$$

kann nach dem Ansatz von Simo-Hughes, bei dem die Spannungsfelder orthogonal zur Differenz zwischen Verzerrungen und symmetrischem Verschiebungsgradienten gewählt werden, die Steifigkeitsmatrix bestimmt werden zu

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

## Ansatzfunktionen

Eine Taylor-Reihen-Entwicklung der Ansatzfunktionen um den Elementmittelpunkt bis zur ersten Ordnung liefert für ein 2D-Scheibenelement mit vier Knoten

$$N_i = \frac{1}{4} \delta_i + b_{xi}(x - x_0) + b_{yi}(y - y_0) + \gamma_i h(\xi, \eta)$$

wobei

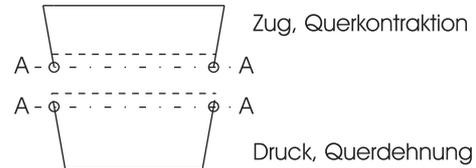
$$b_{xi} = \left. \frac{\delta N_i}{\delta x} \right|_0 \quad b_{yi} = \left. \frac{\delta N_i}{\delta y} \right|_0$$

In Matrixschreibweise lassen sich die Ansatzfunktionen somit zusammenfassen zu

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\Delta}^T + x \mathbf{b}_x^T + y \mathbf{b}_y^T + h \boldsymbol{\gamma}^T$$

## Versteifungseffekte

Zur Eliminierung der Versteifungseffekte genügt es, ein Element im Hourglass-Mode zu betrachten.



Aufgrund des Querdehnungseffektes kann eine Dehnungsannahme mit Anteilen sowohl in x- als auch in y-Richtung getroffen werden:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + q_x e_1 h_{,x} + q_y e_2 h_{,y} \\ \varepsilon_y^0 + q_x e_2 h_{,x} + q_y e_1 h_{,y} \\ 2\varepsilon_{xy}^0 + q_x e_3 h_{,y} + q_y e_3 h_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 + \tilde{\varepsilon}_x \\ \varepsilon_y^0 + \tilde{\varepsilon}_y \\ 2\varepsilon_{xy}^0 + 2\tilde{\varepsilon}_{xy} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt für die B-Matrix

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T + e_1 h_{,x} \boldsymbol{\gamma}^T & e_2 h_{,y} \boldsymbol{\gamma}^T \\ e_2 h_{,x} \boldsymbol{\gamma}^T & \mathbf{b}_y^T + e_1 h_{,y} \boldsymbol{\gamma}^T \\ \mathbf{b}_y^T + e_3 h_{,y} \boldsymbol{\gamma}^T & \mathbf{b}_x^T + e_3 h_{,x} \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix}$$

Mit dem Prinzip der Volumenerhaltung können für die Konstanten  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  Beziehungen hergeleitet werden, so dass die Versteifungseffekte (Volumen, Schub) eliminiert werden.

## Steifigkeitsmatrix mit Stabilisierung

Die Steifigkeitsmatrix lässt sich nun zusammensetzen durch

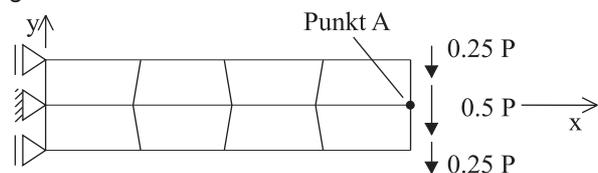
$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{stab}$$

wobei  $\mathbf{K}_1$  durch eine Ein-Punkt-Integration in Elementmitte berechnet wird. Die Stabilisierungsmatrix ist gegeben durch

$$\mathbf{K}_{stab} = \begin{bmatrix} (c_1 H_{xx} + c_2 H_{yy}) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T & c_3 H_{xy} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T \\ c_3 H_{xy} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T & (c_1 H_{yy} + c_2 H_{xx}) \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix}$$

## Beispiel: Kragarm

Für den Kragarm im ebenen Verzerrungszustand mit verzerrten Elementen ergeben sich für unterschiedliche Wahl der Konstanten  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  insbesondere bei inkompressiblem Material wesentlich verbesserte Ergebnisse.



$u_y^{FEM} / u_y^{analyt.}$  im Punkt A

	Quad4	ASMD	ASQBI	ASOI	ASOI(1/2)
$\nu = 0.0$	0.648	0.703	0.939	0.765	1.069
$\nu = 0.25$	0.689	0.795	0.942	0.842	1.119
$\nu = 0.4999$	0.062	0.886	0.849	0.849	1.135