Klausur mit Lösung

Baudynamik

17. Februar 2014

Aufgabe 1 (ca. 15 % der Gesamtpunktzahl)

a) Die freien Schwingungen eines 1-FHG-Systems sollen in einem Phasendiagramm dargestellt werden. Zeichnen Sie zu diesem Zweck die Phasenkurven für 1) den ungedämpften Fall, und 2) den schwach gedämpften Fall.

b) Wie ist die Rayleighsche Dissipationsfunktion im Zusammenhang mit schwach gedämpften Schwingungen von Mehr-FHG-Systemen definiert und wie geht sie in die Energiebilanz ein?

c) Was versteht man unter aktiver und passiver Schwingungsisolierung?

d) Was versteht man unter Rayleigh Dämpfung und welchen Vorteil bringt sie im Hinblick auf die Modaltransformation?

Lösung Aufgabe 1

a) ungedämpfte und schwach gedämpfte Phasenkurve siehe Vorlesungsmitschrift.

b) $R = \frac{1}{2}\sum_i d_i V_{i,Rel}^2 = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T \underline{D}\underline{\dot{q}} \quad , \quad \frac{dE}{dt} = -2R$

c) Passive Schwingungsisolierung:

Ziel: Schutz eines Schwingers (Gebäudes) vor Belastungen infolge Fundamenterregungen.

Aktive Schwingungsisolierung:

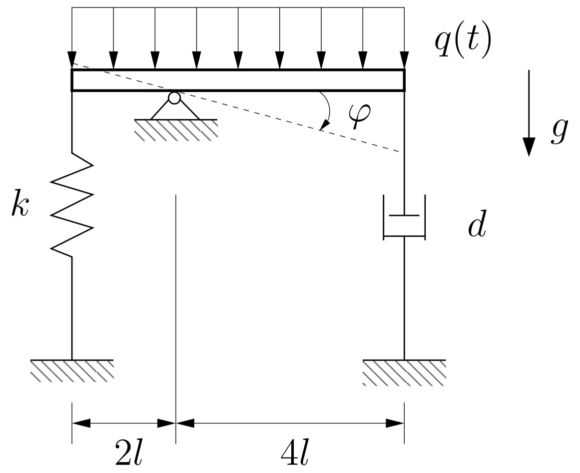
Ziel: Abschirmung von Maschinen (unwuchterregter Schwinger) vom Fundament.

d) Rayleigh Dämpfung $\underline{D} = \alpha\underline{M} + \beta\underline{K}$

Modalzerlegung kann analog zu ungedämpften Systemen durchgeführt werden.

Aufgabe 2 (ca. 35 % der Gesamtpunktzahl)

Ein starrer Balken (Länge $6l$, Masse m, Massenträgheitsmoment bezügl. Schwerpunkt $\Theta_s = 3ml^2$) ist wie dargestellt gelenkig gelagert. Am linken Balkenende ist eine Feder (Steifigkeit k) befestigt. Am rechten Balkenende ist ein Dämpfer (Dämpfungskonstante d) montiert. Auf den Balken wirkt eine gleichförmig verteilte, zeitabhängige Streckenlast $q(t)$.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage?

b) Wie groß sind die Eigenkreisfrequenz ω_0 und der Dämpfungsgrad D?

Gegeben sei eine harmonische Erregung durch die Streckenlast der Form

$$q(t) = \hat{q}_1 \cos(\Omega t) + \hat{q}_2 \cos(2\Omega t)$$

mit gegebener Erregerkreisfrequenz Ω.

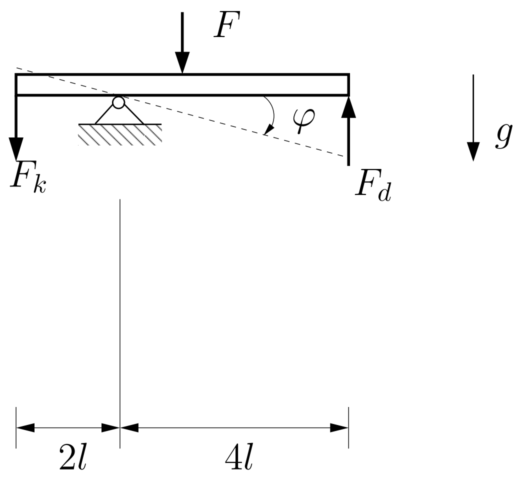
c) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten der periodischen Erregerfunktion.

d) Ermitteln Sie die Schwingungsantwort des Systems für den stationären Fall. Größen, die zuvor bestimmt wurden (wie beispielsweise D), brauchen hier nicht nochmals in Abhängigkeit der gegebenen Größen ausgeschrieben werden.

Gegeben: $l, m, k, d, \hat{q}_1, \hat{q}_2, g, \Omega$

Lösung Aufgabe 2

a) Freikörperbild:



Streckenlast: $F = q(t) \cdot 6l$

Federkraft: $F_k = k \cdot 2l \cdot \varphi$

Dämpfungskraft: $F_d = d \cdot 4l \cdot \dot{\varphi}$

Drallsatz: $\curvearrowright$ $\theta_A \ddot{\varphi} = F \cdot l - F_d \cdot 4l - F_k \cdot 2l$

Massenträgheitsmoment bezüglich Auflager:

$\theta_A = \theta_s + ml^2 = \frac{1}{12} m(6l)^2 + ml^2 = 3ml^2 + ml^2 = 4ml^2$

Die Bewegungsgleichung lautet: $4ml^2\ddot{\varphi} + 16l^2 d\dot{\varphi} + 4l^2 k\varphi = \frac{6}{4} l^2 q(t)$

Die normierte Form der Bewegungsgleichung: $\ddot{\varphi} + \frac{4d}{m}\dot{\varphi} + \frac{k}{m}\varphi = \frac{3}{2m} q(t)$

b) die Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

der Dämpfungsgrad: $2D\omega_0 = \frac{4d}{m}$, $D = \frac{2d}{m\omega_0} = \frac{2d}{\sqrt{km}}$

c) $c_1 = \hat{q}_1, \quad c_2 = \hat{q}_2, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad a_0 = 0$

d) 1. Fremderregung

$\ddot{\varphi} + \frac{4d}{m}\dot{\varphi} + \frac{k}{m}\varphi = \frac{3}{2m}\hat{q}_1 \cos(\Omega t)$

$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \frac{4d}{m\omega_0} = 2D, \quad \eta_1 = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$\varphi'' + \frac{4d}{m\omega_0}\varphi' + \varphi = \frac{3}{2m\omega_0^2}\hat{q}_1 \cos(\Omega t)$

$\varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = \overline{x}_3 \cos(\Omega t)$

mit $\overline{x}_3 = \frac{3}{2k}\hat{q}_1$

Partikuläre Lösung: $\varphi_p = C_p \cos(\eta_1 \tau - \gamma_1) \quad \gamma_1 = \arctan(\frac{2D\eta_1}{1-\eta_1^2})$

Amplitude: $C_p = \overline{x}_3 V_3 = \frac{3}{2k}\hat{q}_1 V_3$

mit: $V_3 = V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)^2 + 4D^2\eta_1^2}}$

2. Fremderregung

$\ddot{\varphi} + \frac{4d}{m}\dot{\varphi} + \frac{k}{m}\varphi = \frac{3}{2m}\hat{q}_2 \cos(2\Omega t)$

$\varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = \frac{3}{2m\omega_0^2}\hat{q}_2 \cos(2\Omega t)$

mit $\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \frac{4d}{m\omega_0} = 2D, \quad \eta_2 = \frac{2\Omega}{\omega_0}$

Partikuläre Lösung: $\varphi_p = C_p \cos(\eta_2 \tau - \gamma_2)$

Amplitude: $C_p = \frac{3}{2k}\hat{q}_2 V_3, \quad \gamma_2 = \arctan(\frac{2D\eta_2}{1-\eta_2^2})$

mit $V_3 = V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_2^2)^2 + 4D^2\eta_2^2}}$

Die Schwingungsantwort des Systems für den stationären Fall:

$\varphi = \frac{3}{2k}\hat{q}_1 \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)^2+4D^2\eta_1^2}} \cos(\eta_1\tau - \gamma_1) + \frac{3}{2k}\hat{q}_2 \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_2^2)^2+4D^2\eta_2^2}} \cos(\eta_2\tau - \gamma_2)$

Aufgabe 2 (alternative Lösung)

a) Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\theta_A\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}(\theta_S + ml^2)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot ml^2\dot{\varphi}^2 = 2ml^2\dot{\varphi}^2$

Potentielle Energie: $V = \frac{1}{2}k(2l\varphi)^2 = \frac{1}{2}k4l^2\varphi^2 = 2kl^2\varphi^2$

Lagrange Funktion: $L = T - V = 2ml^2\dot{\varphi}^2 - 2kl^2\varphi^2$

Die Ableitungen nach φ:

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 4ml^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) = 4ml^2\ddot{\varphi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -4kl^2\varphi$

Die äußere Kraft:

$$Q = \underline{F}_1 \cdot \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \varphi} + \underline{F}_2 \cdot \frac{\partial \underline{r}_2}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q6l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d4l\dot{\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4l \end{bmatrix} = q6l^2 - d16l^2\dot{\varphi}$$

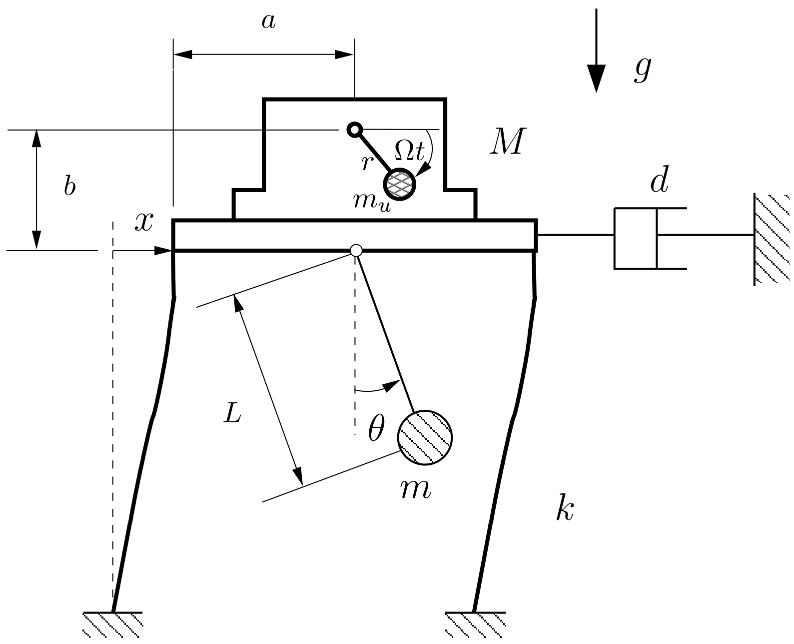
Die Bewegungsgleichung: $4ml^2\ddot{\varphi} + 4kl^2\varphi = 6ql^2 - 16dl^2\dot{\varphi}$

Umstellung: $4ml^2\ddot{\varphi} + 16dl^2\dot{\varphi} + 4kl^2\varphi = 6ql^2$

Die normierte Form der Bewegungsgleichung: $\ddot{\varphi} + 4\frac{d}{m}\dot{\varphi} + \frac{k}{m}\varphi = \frac{3}{2}\frac{q}{m}$

Aufgabe 3 (ca. 50 % der Gesamtpunktzahl)

Der dargestellte einstöckige Rahmen besteht aus einem starren Riegel und zwei masselosen Stielen der Gesamtsteifigkeit k. Dämpfung wird durch einen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) berücksichtigt. Auf dem Riegel ist eine Maschine mit rotierender Unwucht (Masse m_u, Winkelgeschw. Ω, Abstand r vom Drehpunkt) montiert. Die gesamte Masse des starren Riegels und des Maschinenkörpers (ohne Unwucht) beträgt M. Zur Schwingungstilgung wird ein Schwerependel (Länge L, Masse m) am Riegel angebracht.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des betrachteten 2-FHG Systems für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage auf. Ermitteln Sie zu diesem Zweck insbesondere die Massenmatrix $\mathbf{M}$, die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$, und die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$.

b) Ist das System durchdringend gedämpft? Begründen Sie Ihre Anwort.

Im Weiteren soll das ungedämpfte System betrachtet werden ($d = 0$). Es soll davon ausgegangen werden, dass die zugehörigen Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_u \Omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} cos(\Omega t)$$

lauten, mit $\tilde{m} = M + m_u + m$.

c) Schätzen Sie mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten die niedrigste Eigenkreisfrequenz der freien Schwingungen des Systems ab.

d) Bestimmen Sie die Schwingungsamplituden der erzwungenen Schwingungen für den stationären Fall.

e) Wie muss die Länge des Schwerependels gewählt werden, damit Schwingungstilgung auftritt?

Gegeben: M, m_u, m, k, d, g, Ω, a, b, L, r

Lösung Aufgabe 3

a) Die Ortsvektoren und Geschwindigkeitsvektoren für den Riegel mit Maschinenkörper (Masse M), die Pendel Masse m und die Unwuchtmasse m_u:

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} x + a + L \cdot \sin\theta \\ -L \cdot \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} x + a + r \cdot \cos(\Omega t) \\ b - r \cdot \sin(\Omega t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{r}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{r}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + L \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta} \\ L \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{r}}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} - r \cdot \sin(\Omega t) \cdot \Omega \\ -r \cdot \cos(\Omega t) \cdot \Omega \end{bmatrix}$$

Kinetische Energie:

$$T = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + L^2 \cdot \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta}) + \tfrac{1}{2}m_u(\dot{x}^2 + \Omega^2 r^2 - 2\dot{x}\Omega r \sin(\Omega t))$$

Potentielle Energie:

$$V = -mgL \cdot \cos\Omega + m_u g(b - r \cdot \sin(\Omega t)) + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Lagrange Funktion:

$$L = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}L \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} + \tfrac{1}{2}m_u\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m_u\Omega^2 r^2 - m_u\dot{x}\Omega r \cdot \sin(\Omega t) + mgl \cdot \cos(\theta) - m_u g(b - r \cdot \sin(\Omega t)) - \tfrac{1}{2}kx^2$$

Ableitungen nach x und θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + mL \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} + m_u\dot{x} - m_u\Omega r \cdot \sin(\Omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M + m + m_u)\ddot{x} + mL \cdot \cos(\theta) \cdot \ddot{\theta} - mL \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 - m_u\Omega^2 r \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} + m\dot{x}L \cdot \cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta} - m\dot{x}L \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} + m\ddot{x}L \cdot \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}L \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} - mgL \cdot \sin(\theta)$$

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$(M + m + m_u)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + Kx = mu\Omega^2 r \cdot \cos(\Omega t)$$

$$mL\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} + mgL \cdot \sin(\theta) = 0$$

Rayleighsche Dissipationsfunktion und Dämpfungsmatrix:

$$R = \tfrac{1}{2}d\dot{x}^2, \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkung ($\sin\theta \approx \theta$):

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & mL \\ mL & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_u\Omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t)$$

mit $\tilde{m} = M + m_u + m$

b) Ja. Infolge Koppelung des Systems wird die Energie immer dissipiert.

c) Schätzung für die erste Eigenform: $\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix}$

Rayleighquotient: $R = \frac{\underline{\phi}^T \underline{K} \underline{\phi}}{\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi}} = \frac{k+\frac{mg}{l}}{\widetilde{m}+3m}$

$$[1 \quad \tfrac{1}{l}] \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} = [1 \quad \tfrac{1}{l}] \begin{bmatrix} k \\ mg \end{bmatrix} = k + \frac{mg}{l}$$

$$[1 \quad \tfrac{1}{l}] \begin{bmatrix} \widetilde{m} & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix} = [1 \quad \tfrac{1}{l}] \begin{bmatrix} \widetilde{m}+m \\ ml+ml \end{bmatrix} = \widetilde{m} + 3m$$

d) $N = \det(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M}) = \det \begin{bmatrix} k - \Omega^2 \widetilde{m} & -\Omega^2 mL \\ -\Omega^2 mL & mgl - \Omega^2 mL^2 \end{bmatrix}$

Amplituden der stationären Schwingungsantwort:

$a_1 = \frac{Z_1}{N}, \quad a_2 = \frac{Z_2}{N},$

$$Z_1 = \det \begin{bmatrix} m_u \Omega^2 r & -\Omega^2 mL \\ 0 & mgL - \Omega^2 mL^2 \end{bmatrix} = m_u \Omega^2 (mgL - \Omega^2 mL^2)$$

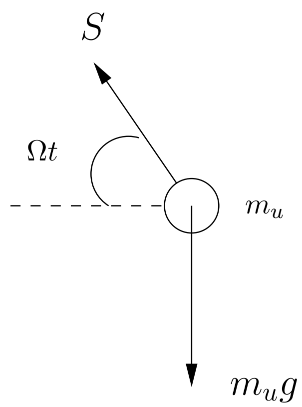
$$Z_2 = \det \begin{bmatrix} k - \Omega^2 \widetilde{m} & m_u \Omega^2 r \\ -\Omega^2 mL & 0 \end{bmatrix} = \Omega^2 mL \Omega^2 r m_u = \Omega^4 mL m_u r$$

e) Schwingungstilgung auftritt, wenn $a_1 = 0$, damit $mgL - \Omega^2 mL^2 = 0$.

Die Pendel Länge: $L = \frac{g}{\Omega^2}$.

Aufgabe 3 (alternative Lösung)

a) Freikörperbild für die Unwuchtmasse m_u:



Die Kooridnaten und Beschleunigungen von m_u :

$x_u = x + a + r \cdot \cos(\Omega t)$

$\ddot{x}_u = \ddot{x} - \Omega^2 r \cdot \cos(\Omega t)$

$y_u = b - r \sin \Omega t$

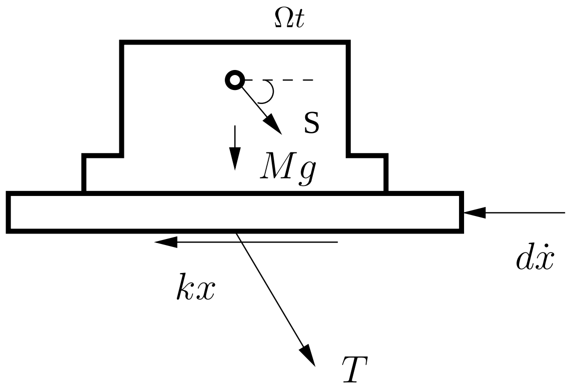
$\ddot{y}_u = r\Omega^2 \cdot \sin(\Omega t)$

Die Bewegungsgleichungen für m_u:

$\rightarrow \quad m_u(\ddot{x} - \Omega^2 r \cdot \cos(\Omega t)) = -S \cdot \cos(\Omega t) \quad (1)$

$\uparrow \quad m_u \Omega^2 r \cdot \sin(\Omega t)) = S \cdot \sin(\Omega t) - m_u g \quad (2)$

Freikörperbild für die Hauptmasse M:

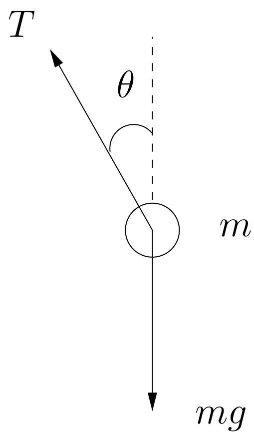


Die Bewegungsgleichungen für die Masse M:

$\rightarrow \quad M\ddot{x} = -kx - d\dot{x} + T \cdot \sin\theta + S \cdot \cos(\Omega t) \quad (3)$

$\uparrow \quad M\ddot{y} = -S \cdot \sin(\Omega t) - Mg - T \cdot \cos\theta \quad (4)$

Freikörperbild für die Pendelmasse m:



Die Koordinaten, Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen für Masse m:

$x_T = x + L \cdot \sin\theta, \quad \dot{x}_T = \dot{x} + L \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}, \quad \ddot{x}_T = \ddot{x} - L \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + L \cdot \cos\theta \cdot \ddot{\theta}$

$y_T = -L \cdot \cos\theta, \quad \dot{y}_T = L \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}, \quad \ddot{y}_T = L \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + L \cdot \sin\theta \cdot \ddot{\theta}$

Die Bewegungsgleichungen für die Pendelmasse m:

$\rightarrow \quad m(\ddot{x} - L \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + L \cdot \cos\theta \cdot \ddot{\theta}) = -T \cdot \sin\theta \quad (5)$

$\uparrow \quad m(L \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + L \cdot \sin\theta \cdot \ddot{\theta}) = T \cdot \cos\theta - mg \quad (6)$

Setzen die Gleichungen (1) und (5) in (3) ein:

$M\ddot{x} + m(\ddot{x} - L \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + L \cdot \cos\theta \cdot \ddot{\theta}) + d\dot{x} + kx = -m_u(\ddot{x} - \Omega^2 r \cdot \cos(\Omega t))$

Nach der Umstellung:

$(M + m + m_u)\ddot{x} - mL \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + mL \cdot \cos\theta \cdot \ddot{\theta} + d\dot{x} + kx = m_u \Omega^2 r \cdot \cos(\Omega t)$

Setzen die Gleichung (5) in (6) ein:

$mL \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + mL \cdot \sin\theta \cdot \ddot{\theta} = -\frac{m(\ddot{x} - L \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + L \cdot \cos\theta \cdot \ddot{\theta})}{\sin\theta} \cos\theta - mg$

Nach der Umstellung:

$mL \cdot \cos\theta \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + mL \cdot \sin^2\theta \cdot \ddot{\theta} + (m\ddot{x} - mL \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + mL \cdot \cos\theta \cdot \ddot{\theta}) \cdot \cos\theta + mg \cdot \sin\theta = 0$

Weitere Umformung liefert:

$mL\ddot{\theta} + m\ddot{x} + mg \cdot \sin\theta = 0$

$mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} + mgL \cdot \sin\theta = 0$

Die Linearisierung gilt für kleine Auslenkung: $\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta$

Die Bewegungsgleichungen sind:

$(M + m + m_u)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + d\dot{x} + kx = m_u \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t)$

$mL\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} + mgL\theta = 0$