Institut für Mechanik	Klausur
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Einführung in die Kontinuumsmechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	17. Februar 2015

1. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

In einem Punkt eines Kontinuums seien die Komponenten des Cauchy-Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ bzgl. der kartesischen Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ gegeben:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\{\boldsymbol{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & -50 & 0 \\ 24 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten σ_{13} und σ_{21}.

b) Berechnen Sie die Hauptspannungen σ_I, σ_{II} und σ_{III}.
Welcher Spannungszustand liegt vor?

c) Bestimmen Sie die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen (Eigenvektoren).

ohne Punkte

Lösung zur 1. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

a) Aus Symmetriegründen folgt:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 24$$
$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = 0$$

b) Die Hauptspannungen werden aus den Eigenwertgleichungen

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

bestimmt. Mit den Invarianten des Spannungstensors

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 18 - 50 + 32 = 0,\\
I_2 &= -(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\\
&= 900 + 1600 - 576 + 576 = 2500,\\
I_3 &= \det[\sigma_{ij}] = -28800 + 28800 = 0
\end{aligned}$$

folgt daraus die Gleichung

$$\sigma^3 - 2500\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma(\sigma^2 - 2500) = 0$$

mit den drei nach Größe geordneten Lösungen

$$\underline{\underline{\sigma_I = 50}}, \quad \underline{\underline{\sigma_{II} = 0}}, \quad \underline{\underline{\sigma_{III} = -50}}.$$

Da $\sigma_{II} = 0 \Rightarrow$ ebener Spannungszustand!
σ_I und σ_{III} spannen eine Ebene auf, gekennzeichnet durch den Normalenvektor n_{II}.

c) Die Hauptspannungsrichtungen folgen aus dem Gleichungssystem $\underline{(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j} = 0$, bzw. ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
(\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0,\\
\sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0,\\
\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Um die zu σ_I gehörige Richtung zu ermitteln, verwenden wir die ersten beiden Gleichungen sowie die Bedingung, dass der Richtungsvektor den Betrag 1 haben soll:

$$\left.\begin{aligned}
-32n_1 + 24n_3 &= 0,\\
-100n_2 &= 0,\\
n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1,
\end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{3}{5}, \; n_2 = 0, \; n_3 = \frac{4}{5}.$$

Der Richtungsvektor lautet dementsprechend

$$\underline{\underline{n_I^T = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}).}}$$

Auf gleiche Weise erhalten wir für die Richtung von σ_{II}

$$\left.\begin{aligned} 18n_1 + 24n_3 &= 0, \\ -50n_2 &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad n_1 = -\frac{4}{5}, \; n_2 = 0, \; n_3 = \frac{3}{5},$$

$\Rightarrow n_3 = -\frac{3}{4} n_1$ ✓

$\Rightarrow n_1^2 + 0^2 + \frac{9}{16} n_1^2 = 1$

$\Leftrightarrow n_1^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow n_1 = \pm \frac{4}{5}$

bzw.

$$\underline{\underline{n_{II}^T = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}).}}$$

Für die Richtung von σ_{III} verwenden wir die ersten und die dritte Gleichung, da die zweite identisch erfüllt ist:

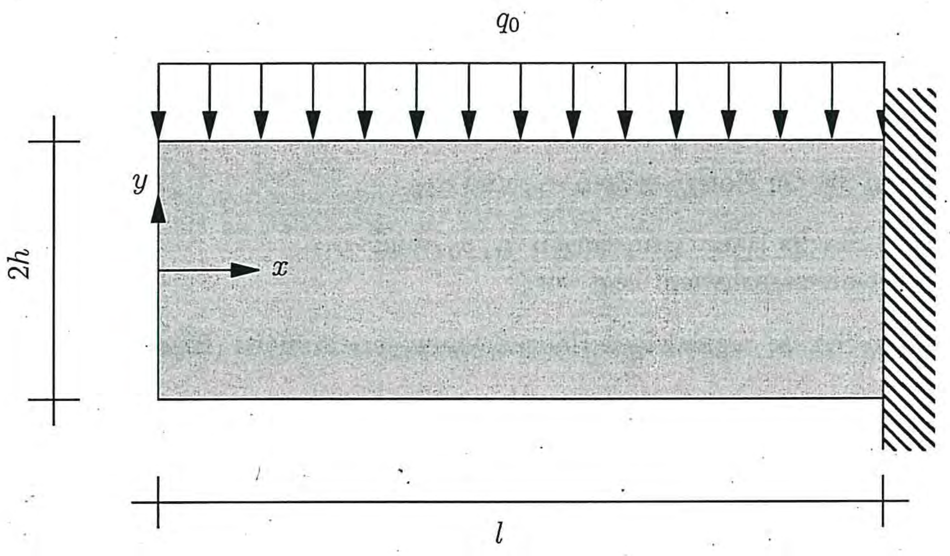
$$\left.\begin{aligned} 68n_1 + 24n_3 &= 0, \\ 24n_1 + 82n_3 &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad n_1 = 0, \; n_2 = \pm 1, \; n_3 = 0.$$

Damit das System der Richtungsvektoren ein Rechtssystem darstellt, wählen wir bei n_2 von den zwei möglichen Vorzeichen das Minuszeichen aus, d.h. es wird

$$\underline{\underline{n_{III}^T = (0, -1, 0).}}$$

2. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

Die dargestellte Scheibe ist am oberen Rand wie skizziert belastet. Am rechten Rand ist sie unverschieblich gelagert. Die Dicke der Scheibe ist t.



a) Geben Sie alle Randbedingungen in der x-y-Ebene an.

b) Gegeben ist folgende Airy'sche Spannungsfunktion:

$$F(x,y) = -\frac{q_0}{4t}x^2 - \frac{3q_0}{8th}x^2y + \frac{q_0}{8th^3}x^2y^3 + Ay^3 - \frac{q_0}{40th^3}y^5.$$

Bestimmen Sie die Konstante A aus einer integralen Spannungsrandbedingung bei $x = 0$.
Hinweis: Stellen Sie alle Spannungen bei $x = 0$ formelmäßig dar!

c) Skizzieren Sie den Verlauf aller Spannungen am Rand $x = 0$.

d) Wie groß ist die Spannung $\sigma_{yy}(x, y)$ nach der Balkentheorie?

Lösung zur 2. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

a) Randbedingungen:

$$\sigma_y(x, y = +h) = -\frac{q_0}{t}, \quad \tau_{xy}(x, y = +h) = 0$$
$$\sigma_y(x, y = -h) = 0, \quad \tau_{xy}(x, y = -h) = 0$$
$$\sigma_x(x = 0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(x = 0, y) = 0$$
$$u_x(x = L, Y) = u_Y(x = L, Y) = 0$$

b)

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{3}{4}\frac{q_0}{th}x - \frac{3}{4}\frac{q_0}{th^3}xy^2$$
$$\tau_{xy}(x = 0, y) = 0 \text{ (erfüllt!)}$$
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{q_0 x^2}{8th^3}6y + A6y - \frac{q_0}{40th^3}20y^3$$
$$\sigma_x(x = 0, y) = A6y - \frac{q_0}{2th^3}y^3$$
$$\sum F_x = 0 = \int \sigma_x \, \mathrm{d}y = \int A6y - \frac{q_0}{2th^3}y^3 \, \mathrm{d}y = A3y^2 - \frac{q_0}{8th^3}y^4\Big|_h^{-h}$$
$$\sum M(x = 0) = 0 = \int \sigma_x y \, \mathrm{d}y = \int (A6y - \frac{q_0}{2th^3}y^3)y \, \mathrm{d}y = A2y^3 - \frac{q_0 y^5}{10th^3}\Big|_h^{-h}$$

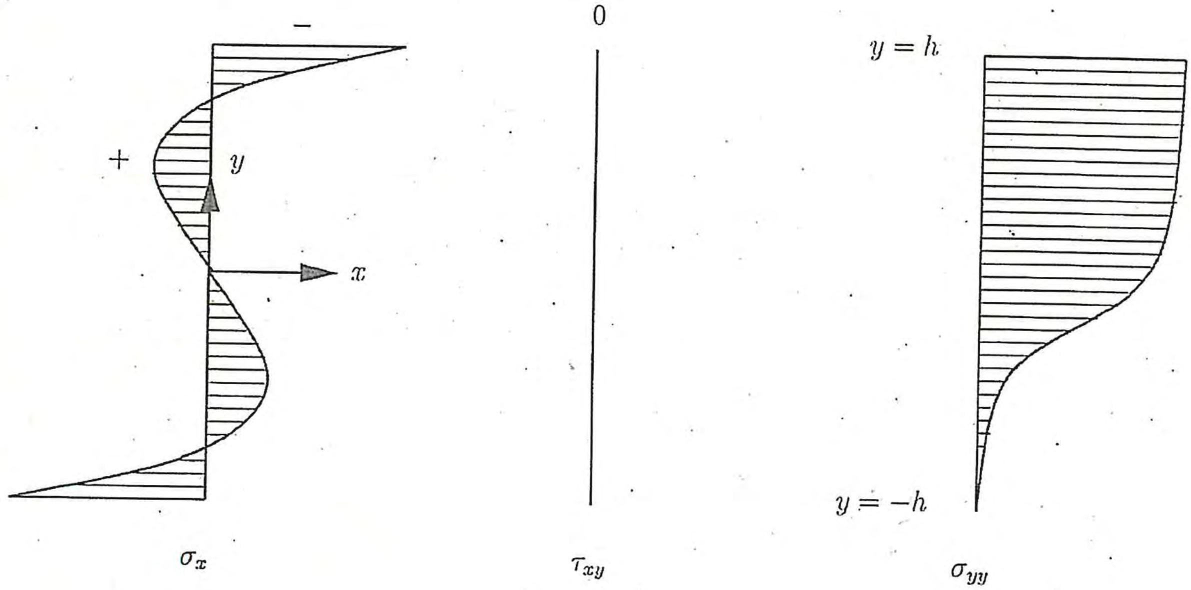
$$\Rightarrow A = \underline{\underline{\frac{q_0}{20th}}}$$

c) Verlauf aller Spannungen am Rand $x = 0$:

$$\sigma_x(x = 0, y = h) = -\frac{2}{10}\frac{q_0}{t}$$
$$\sigma_x(x = 0, y = -h) = \frac{2}{10}\frac{q_0}{t}$$
$$\sigma_y = -\frac{q_0}{2t} - \frac{3}{4}\frac{q_0}{th}y + \frac{1}{4}\frac{q_0}{th^3}y^3$$
$$\sigma_y(x = 0, y = h) = -\frac{q_0}{t}$$

d)

$$\sigma_{yy}(x, y) = 0$$



−
+
y
x
σ_x
0
τ_{xy}
$y = h$
$y = -h$
σ_{yy}

3. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

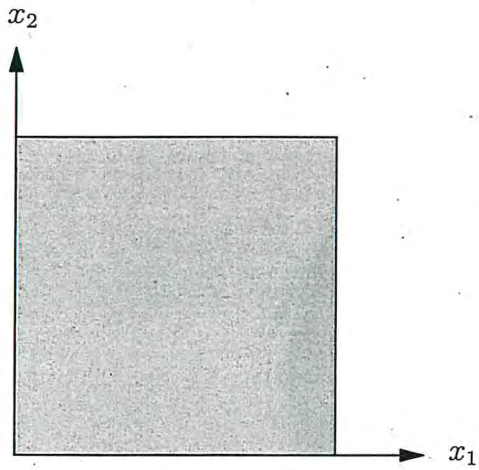


Bild a

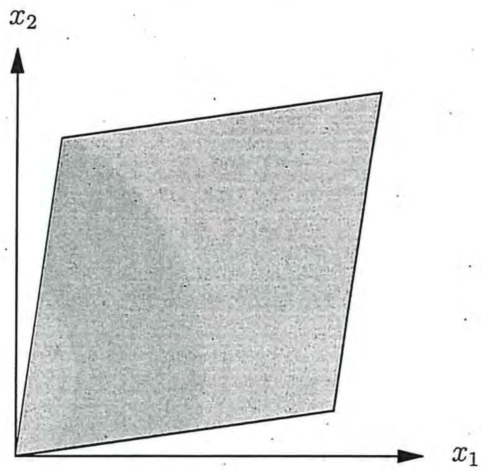


Bild b

Das Einheitsquadrat (Bild a) wird wie obenstehend (Bild b) deformiert mit dem Verschiebungsfeld

$$u_1(x_1, x_2) = \varepsilon x_2$$
$$u_2(x_1, x_2) = \varepsilon x_1$$

wobei ϵ eine Vergleichsdehnung darstellt.

a) Berechnen Sie die Komponenten ε_{ij} des Verzerrungstensors.

Das Quadrat soll vor der Deformation aus zwei identischen Dreiecken zusammengeschweißt werden.

b) Welche Diagonale des Quadrats ist als Schweißnaht zu wählen, so dass nach der Deformation in der Naht nur Druckspannungen vorliegen.

Gegeben: Isotropes linear-elastisches Stoffgesetz:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

Lösung zur 3. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

a) Infinitesimaler Verzerrungstensor:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad [\varepsilon] = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

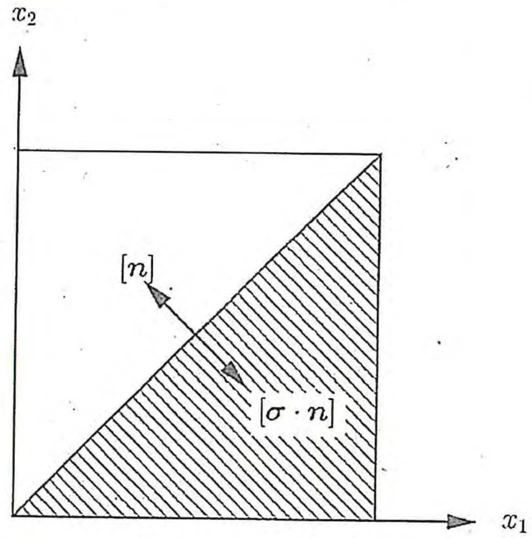
b)

$$[\sigma] = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$[n] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{wirkt senkrecht zur schraffierten Flche}$$

$$[\sigma \cdot n] = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\mu \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Komponente in $[n]$-Richtung:



$$[(\sigma \cdot n) \cdot n] = \sqrt{2}\mu \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\mu\varepsilon < 0$$

Komponente tangential mit $[\tau] = \binom{1}{1}\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$[(\sigma \cdot n) \cdot \tau] = 0 \Rightarrow \text{nur Druckbelastung!}$$

Fall $[\tau] \perp [n]$, d.h. $[\tau] = \binom{1}{1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (auch Diagonale)

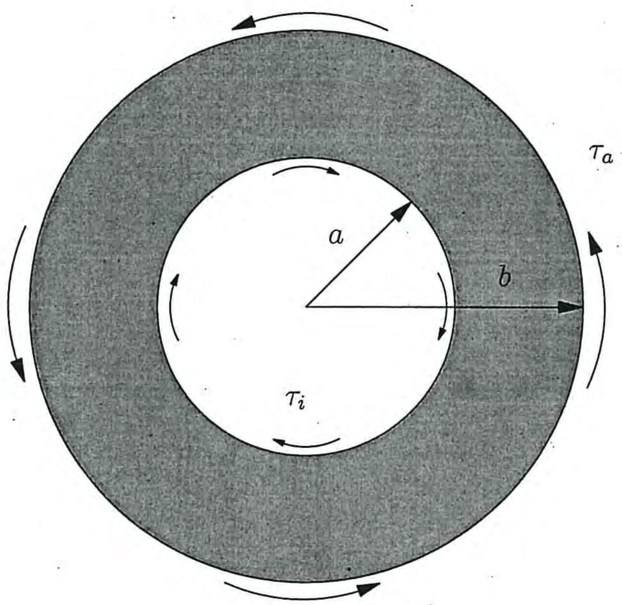
$$[\sigma \cdot \tau] = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\mu \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Komponente in $[\tau]$-Richtung

$$[(\sigma \cdot \tau) \cdot \tau] = \sqrt{2}\mu \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\mu\varepsilon \quad \text{Zugbelastung!}$$

4. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

Die dargestellte Kreisringscheibe ist entlang des Innenrandes ($r = a$) durch eine vorgegebene konstante Schubspannung τ_i belastet.



a) Bestimmen Sie die konstante Schubspannung τ_a am Außenrand ($r = b$), so dass Gleichgewicht herrscht.

b) Geben Sie den Spannungsverlauf $\sigma_{r\varphi}(r)$ an.

c) Bestimmen Sie die Relativverschiebung $u_\varphi(r = b) - u_\varphi(r = a)$ zwischen Außen- und Innenrand.

Gegeben: τ_i, E, ν.

Lösung zur 4. Aufgabe (ca. 25% der Gesamtpunktzahl)

a) mit

$$\sigma_{r\varphi}(r) = -\frac{E}{1+\nu}\frac{C_4}{r^2}$$

$$\tau_a = \sigma_{r\varphi}(r=b) = -\frac{E}{1+\nu}\frac{C_4}{b^2}\,.$$

mit

$$\sigma_{r\varphi}(r=a) = \tau_i = -\frac{E}{1+\nu}\frac{C_4}{a^2} \quad \Rightarrow C_4 = -\frac{\tau_i\,(1+\nu)\,a^2}{E}$$

(2) in (1)

$$\tau_a = -\frac{E}{1+\nu}\frac{1}{b^2}\,(-\frac{\tau_i\,(1+\nu)\,a^2}{E}) = \frac{a^2}{b^2}\,\tau_i$$

b) mit (2)

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{C_4}{r^2} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{1}{r^2}\,(-\frac{\tau_i\,(1+\nu)\,a^2}{E}) = \frac{a^2}{r^2}\,\tau_i$$

c) mit

$$u_\varphi(r) = C_3\,r + \frac{C_4}{r}$$

$\boxed{\text{Annahme: } u_\varphi(r=a)=0 \text{ (z.B. Lager bei } r=a)}$ mit (2)

$$u_\varphi(a) = C_3\,a + \frac{C_4}{a} = 0 \quad \Rightarrow C_3 = \frac{\tau_i\,(1+\nu)}{E}$$

Relativverschiebung mit (2) und (3)

$$\begin{aligned} u_\varphi(b) - u_\varphi(a) &= C_3\,(b-a) + C_4\,(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}) \\ &= \frac{\tau_i\,(1+\nu)}{E}\,[(b-a) - a^2\,(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})] = \frac{\tau_i\,(1+\nu)}{E}\,(b-\frac{a^2}{b}) \end{aligned}$$