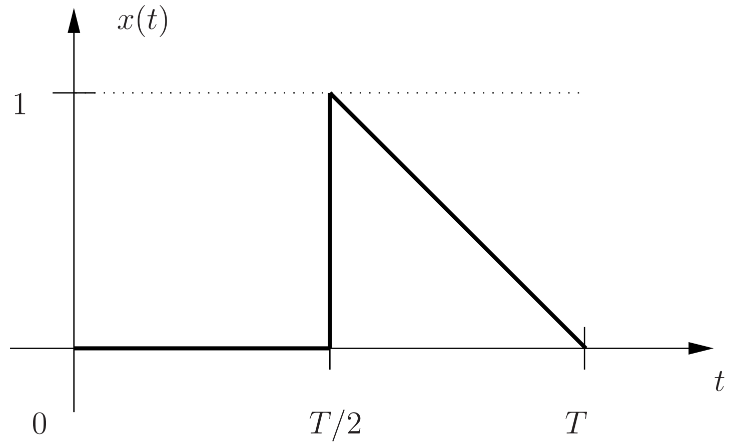
Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Baudynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	15.02.2016

Aufgabe 1 (ca. 20 % der Gesamtpunktzahl)

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten des skizzierten periodischen Funktionsverlaufs (Nur eine Schwingungsperiode der Dauer T dargestellt).

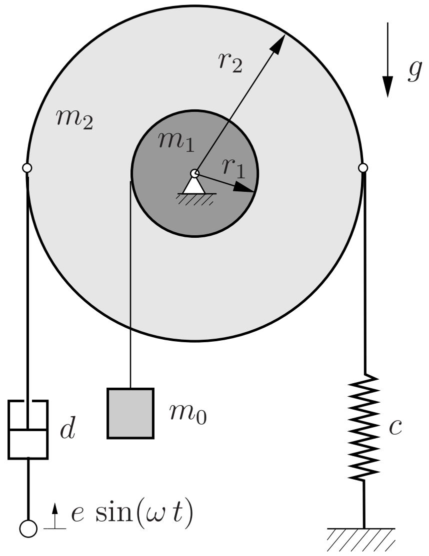


Gegeben: T

Hinweis:

$$\int x \sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a}$$
$$\int x \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a}$$

Aufgabe 2 (ca. 33 % der Gesamtpunktzahl)



Zwei homogene Kreisscheiben (Radius r_1 bzw. r_2, Masse m_1 bzw. m_2) sind fest miteinander verbunden und reibungsfrei drehbar gelagert. An die große Scheibe sind eine Feder (Steifigkeit c) sowie ein Dämpfer (Dämpfungskonstante d) angeschlossen. An der kleinen Scheibe hängt eine Masse m_0. Das System wird durch eine harmonische Bewegung des Dämpfers zum Schwingen angeregt.

Bestimmen Sie:

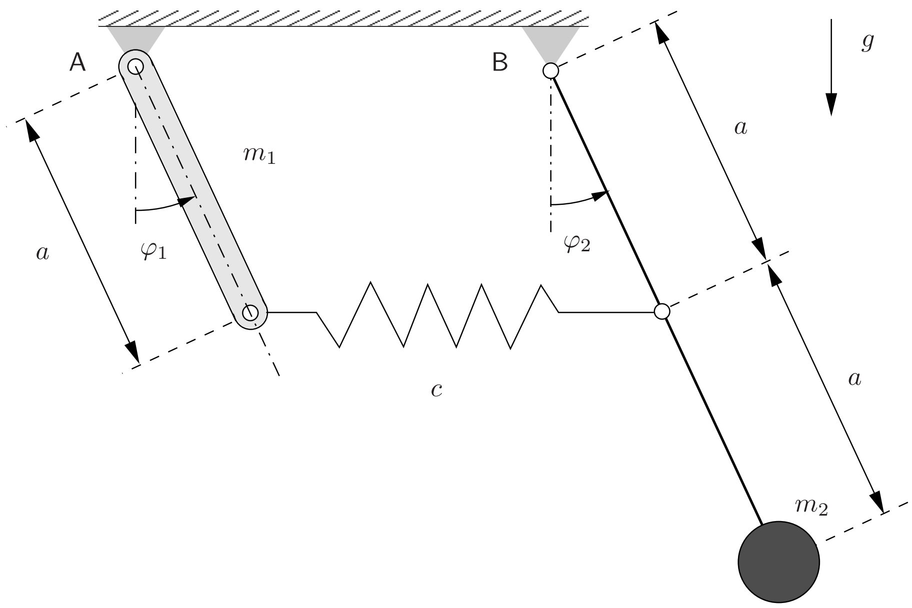
a) die Bewegungsgleichung mit der synthetischen Methoden (Freischneiden!).

b) die Eigenkreisfrequenz sowie den Dämpfungsgrad der Drehschwingung des Systems.

Geg.: r_1, r_2, m_0, m_1, m_2, d, c, g

Aufgabe 3 (ca. 47 % der Gesamtpunktzahl)

Zwei Pendel sind wie dargestellt über eine Feder der Steifigkeit c miteinander gekoppelt. Das erste Pendel besteht aus einem schlanken homogenen Stab der Masse m_1 und der Länge a, während das zweite Pendel aus einem masselosen Stab der Länge $2a$ besteht, an dessen freien Ende eine Punktmasse m_2 befestigt ist. Beide Stäbe können sich um ihre Drehachsen A und B reibungslos drehen. In der Lage $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ sei die Feder ungespannt. Das dargestellte System befindet sich zudem im Erdanziehungsfeld der Erde. *Für die Auslenkung der Feder sei nur der horizontale Anteil zu berücksichtigen!*



Bestimmen Sie:

a) die Bewegungsgleichungen im Rahmen der angegebenen generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 mit Hilfe Lagrange 2.Art.

b) die linearisierten Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen.

c) die Eigenkreisfrequenzen und Modalformen des vorliegenden Systems unter folgenden Bedingungen: $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $c = \frac{mg}{2a}$. Stellen Sie zudem die Schwingungsmoden des Systems zeichnerisch dar (Skizze)!

Gegeben: m_1, m_2, a, c, g

Musterlösung Aufgabe 1

Bestimmung der Fourierkoeffizienten

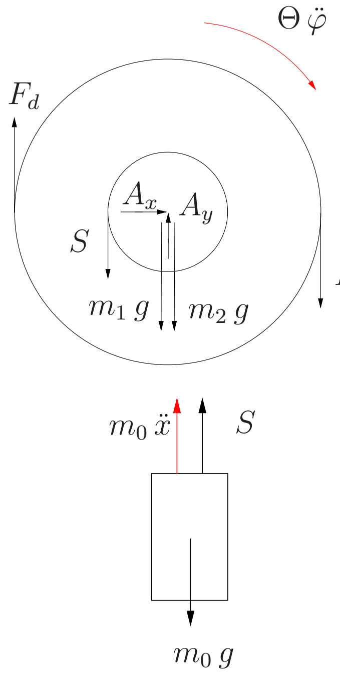
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left[-\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} t + 2\,\mathrm{d}t\right] \\
&= -\frac{2}{T^2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{T}{2}}^{T} + \frac{1}{T}\left[2t\right]_{\frac{T}{2}}^{T} \\
&= -\frac{2}{T^2}\left[\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{8}T^2\right] + \frac{1}{T}\left[2T - T\right]] \\
&= -1 + \frac{1}{4} + 2 - 1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t) cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(-\frac{2}{T}t + 2\right) cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{4}{T^2}\int_{\frac{T}{2}}^{T} t cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \frac{4}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{4}{T^2}\left[\frac{1}{n^2\omega^2}cos(n\omega t) + \frac{1}{n\omega}t sin(n\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} + \frac{4}{T}\left[\frac{1}{n\omega}sin(n\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} \\
&= -\frac{4}{T^2}\left[\left(\frac{1}{4n^2\pi^2}T^2 cos(2\pi n) + \frac{1}{2\pi n}T^2 sin(2\pi n)\right) - \left(\frac{1}{4n^2\pi^2}T^2 cos(\pi n) + \frac{1}{2\pi n}T^2 sin(\pi n)\right)\right] \\
&\quad + \frac{4}{T}\left[\left(\frac{1}{2n\pi}T sin(2n\pi)\right) - \left(\frac{1}{2n\pi}T sin(n\pi)\right)\right] \\
&= \left[-\frac{1}{n^2\pi^2}cos(2n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2}cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}sin(2\pi n) - \frac{2}{n\pi}sin(\pi n) + \frac{2}{n\pi}sin(2\pi n) - \frac{2}{n\pi}sin(\pi n)\right] \\
&= -\frac{1}{\pi^2 n^2}\left[1 - cos(\pi n)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\left[\int_{\frac{T}{2}}^{T} -\frac{2}{T}tsin(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 2sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{n^2\omega^2}\frac{2}{T}sin(n\omega t) + \frac{1}{n\omega}\frac{2}{T}tcos(n\omega t) - 2\frac{1}{n\omega}cos(n\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} \\
&= \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{n^2\omega^2}\frac{2}{T}sin(n\omega T) + \frac{1}{n\omega}\frac{2}{T}Tcos(n\omega T) - 2\frac{1}{n\omega}cos(n\omega T)\right] \\
&\quad + \frac{2}{T}\left[\frac{1}{n^2\omega^2}\frac{2}{T}sin(n\omega\frac{T}{2}) - \frac{1}{n\omega}\frac{2}{T}\frac{T}{2}cos(n\omega\frac{T}{2}) + 2\frac{1}{n\omega}cos(n\omega\frac{T}{2})\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{\pi n}sin(2\pi n) + 2cos(2\pi n) + \frac{1}{\pi n}sin(\pi n) - cos(\pi n) - 2cos(2\pi n) + 2cos(\pi n)\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[cos(\pi n)\right]
\end{aligned}
$$

Musterlösung Aufgabe 2

a) Erstellen der Freikörperbilder



Drallsatz

$$\Theta\,\ddot{\varphi} + F_c\,r_2 + F_d\,r_2 - S\,r_1 = 0 \qquad (1)$$

mit:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2}\,m_1\,r_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,r_2^2 \\ F_c &= c\,x_1 \\ F_d &= d\,(\,\dot{x}_d + \dot{x}_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

Schwerpunktsatz:

$$S + m_0\,\ddot{x} - m_0\,g = 0 \qquad (3)$$

Kinematik:

$$\ddot{x} = \ddot{\varphi}\,r_1 \quad (4) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varphi\,r_2 \\ \dot{x}_1 &= \dot{\varphi}\,r_2 \end{aligned} \quad (5) \qquad \begin{aligned} x_d &= e\,\sin(\omega\,t) \\ \dot{x}_d &= e\,\omega\,\cos(\omega\,t) \end{aligned} \quad (6)$$

Einsetzen der Gl. (2)-(6) in Gl. (1):

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Theta\,\ddot{\varphi} + c\,\varphi\,r_2^2 + d\,(e\,\omega\,\cos(\omega\,t)\,r_2 + \dot{\varphi}\,r_2^2) - m_0\,g\,r_1 + m_0\,\ddot{\varphi}\,r_1^2 = 0 \\ &\Rightarrow [\,\Theta + m_0\,r_1^2\,]\,\ddot{\varphi} + d\,\dot{\varphi}\,r_2^2 + c\,r_2^2\,\varphi = m_0\,g\,r_1 - d\,e\,\omega\,\cos(\omega\,t)\,r_2 \\ &\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{d\,r_2^2}{\Theta + m_0\,r_1^2}\,\dot{\varphi} + \frac{c\,r_2^2}{\Theta + m_0\,r_1^2}\,\varphi = \frac{m_0\,g\,r_1}{\Theta + m_0\,r_1^2} - \frac{d\,e\,\omega\,\cos(\omega\,t)\,r_2}{\Theta + m_0\,r_1^2} \end{aligned} \qquad (7)$$

Allgemeine DGL:

$$\ddot{\varphi} + 2\,D\,\omega\,\dot{\varphi} + \omega^2\,\varphi = 2\,D\,\eta\,\omega^2\,\cos(\Omega\,t) \qquad (8)$$

Somit ergeben sich die Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,c\,r_2^2}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + 2\,m_0\,r_1^2}} \qquad (9)$$

und der Dämpfungsgrad

$$D = \frac{d\, r_2}{2\sqrt{\frac{c}{2}\left[\, m_1\, r_1^2 + m_2\, r_2^2 + 2\, m_0\, r_1^2 \,\right]}} \tag{10}$$

Musterlösung Aufgabe 3

a) Lösungsmöglichkeit über Lagrange 2. Art

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\theta_1^{(A)}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^{(B)}\dot{\varphi}_2^2$$

mit MTM bzgl. jeweiligem MGP:

$$\begin{aligned}\theta_1^{(A)} &= \theta_1^{(S)} + m(\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{1}{12}m_1 a^2 + m\frac{a^2}{4} \\ &= \frac{1}{3}m_1 a^2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\theta_2^{(B)} &= m_2(2a)^2 \\ &= 4m_2 a^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{6}m_1 a^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 a^2\dot{\varphi}_2^2$$

Potentielle Energie

$$V = -m_1 g\frac{a}{2}\cos(\varphi_1) - 2m_2 g a\cos(\varphi_2) + \frac{1}{2}ca^2\left(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\right)^2$$

Lagrange Funktion

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ &= \frac{1}{6}m_1 a^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 a^2\dot{\varphi}_2^2 + m_1 g\frac{a}{2}\cos(\varphi_1) + 2m_2 g a\cos(\varphi_2) - \frac{1}{2}ca^2\left(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\right)^2\end{aligned}$$

Lagrange Formalismus (Lagrange 2. Art; konservatives System)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{3} m_1 a^2 \dot{\varphi}_1 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{1}{3} m_1 a^2 \ddot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_1 g \frac{a}{2} \sin(\varphi_1) - c a^2 (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))\,(-\cos(\varphi_1))$$

$$\underline{\Rightarrow \frac{1}{3} m_1 a^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g \frac{a}{2} \sin(\varphi_1) - c a^2 \cos(\varphi_1)(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = 4 m_2 a^2 \dot{\varphi}_2 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = 4 m_2 a^2 \ddot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -2 m_2 g a \sin(\varphi_2) - c a^2 \cos(\varphi_2)(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))$$

$$\underline{\Rightarrow 4 m_2 a^2 \ddot{\varphi}_2 + 2 m_2 g a \sin(\varphi_2) + c a^2 \cos(\varphi_2)(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) = 0}$$

b) Linearisierung

$$\sin(\varphi) \approx \varphi \qquad \cos(\varphi) \approx 1 \qquad \sin(\varphi)\cos(\varphi) \approx \varphi$$

Matrix-Vektor-Notation

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 a^2 & 0 \\ 0 & 4 m_2 a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g \frac{a}{2} + c a^2 & -c a^2 \\ -c a^2 & 2 m_2 g a + c a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Eigenkreisfrequenzen

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M}) &= \left| \begin{bmatrix} m_1 g \frac{a}{2} + c a^2 - \lambda \frac{1}{3} m_1 a^2 & -c a^2 \\ -c a^2 & 2 m_2 g a + c a^2 - \lambda 4 m_2 a^2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} 2 m g a - \lambda m a^2 & -\frac{1}{2} m g a \\ -\frac{1}{2} m g a & \frac{5}{2} m g a - \lambda 4 m a^2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left(2 m g a - \lambda m a^2\right)\left(\frac{5}{2} m g a - \lambda 4 m a^2\right) - \frac{1}{4} m^2 g^2 a^2 \\ &= \lambda^2 4 m^2 a^4 - \lambda \left(\frac{21}{2} m^2 g a^3\right) + \frac{19}{4} m^2 g^2 a^2 \\ &= \lambda^2 + \left(-\frac{21}{8}\frac{g}{a}\right) + \frac{19}{16}\frac{g^2}{a^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{21}{16}\frac{g}{a} \mp \sqrt{\left(-\frac{21}{16}\frac{g}{a}\right)^2 - \frac{19}{16}\frac{g^2}{a^2}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\left(\frac{21}{16} - \sqrt{\left(-\frac{21}{16}\right)^2 - \frac{19}{16}}\right)\frac{g}{a}} = 0.7622\sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\left(\frac{21}{16} + \sqrt{\left(-\frac{21}{16}\right)^2 - \frac{19}{16}}\right)\frac{g}{a}} = 1.4297\sqrt{\frac{g}{a}}$$

Modalformen

1) Eigenform/Hauptschwingung

$$(\boldsymbol{K} - \lambda_1 \boldsymbol{M})\,\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2mga - \lambda_1 ma^2 & -\frac{1}{2}mga \\ -\frac{1}{2}mga & \frac{5}{2}mga - \lambda_1 4ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(2mga - \lambda_1 ma^2\right) a_{11} - \frac{1}{2}mga\, a_{12} = 0$$

$$\Rightarrow a_{12} = \frac{2\left(2mga - \lambda_1 ma^2\right)}{mga} a_{11}$$

$$\Rightarrow a_{12} = \left(4 - 2\lambda_1 \frac{a}{g}\right) a_{11}$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{a}_1 = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \left(4 - 2\lambda_1 \frac{a}{g}\right) \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.8381 \end{bmatrix}}$$

2) Eigenform/Hauptschwingung

$$(\boldsymbol{K} - \lambda_2 \boldsymbol{M})\,\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2mga - \lambda_2 ma^2 & -\frac{1}{2}mga \\ -\frac{1}{2}mga & \frac{5}{2}mga - \lambda_2 4ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(2mga - \lambda_2 ma^2\right) a_{21} - \frac{1}{2}mga\, a_{22} = 0$$

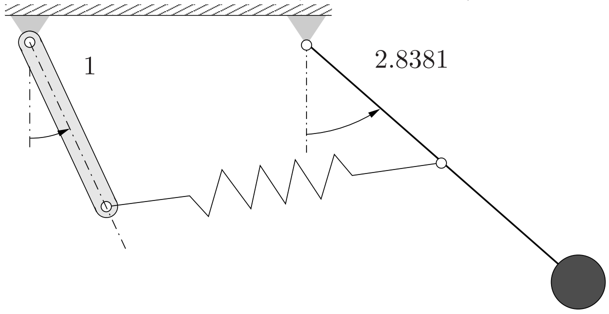
$$\Rightarrow a_{22} = \frac{2\left(2mga - \lambda_2 ma^2\right)}{mga} a_{21}$$

$$\Rightarrow a_{22} = \left(4 - 2\lambda_2 \frac{a}{g}\right) a_{21}$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{a}_2 = a_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ \left(4 - 2\lambda_2 \frac{a}{g}\right) \end{bmatrix} = a_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.0881 \end{bmatrix}}$$

Darstellung Eigenformen

1.Eigenform $\boldsymbol{a}_1$ (gleichphasig)



2.Eigenform $\boldsymbol{a}_2$ (gegenphasig)