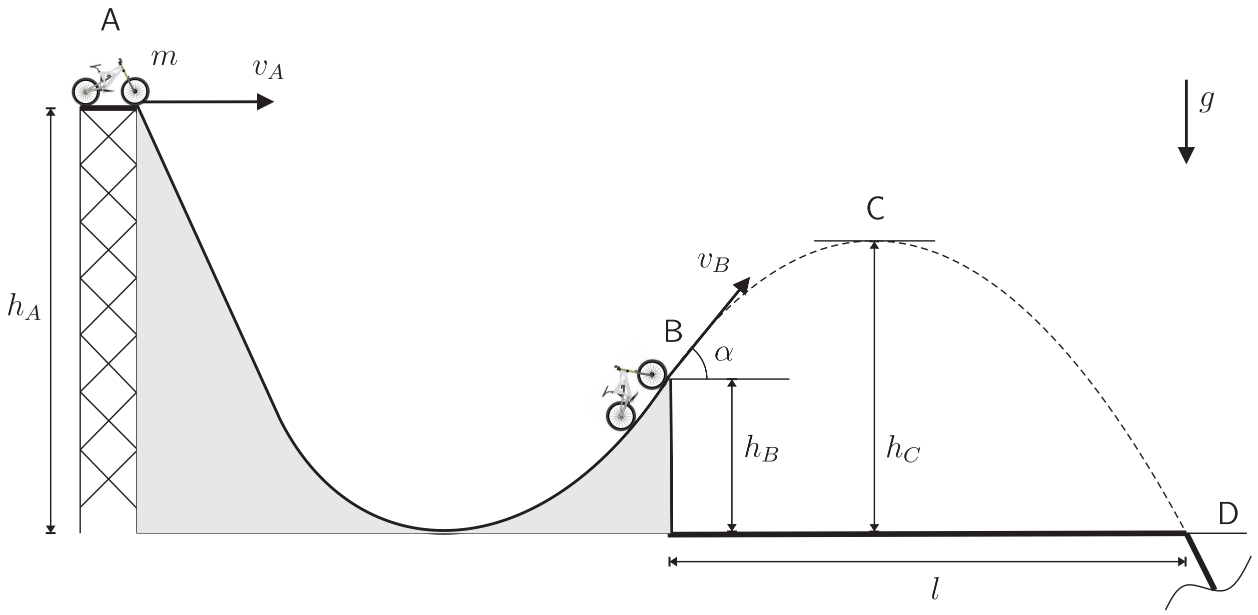
1. Aufgabe (ca. 26 % der Gesamtpunktzahl)



Ein als Punktmasse m idealisierter Radfahrer (vernachlässigen Sie die Höhe des Rades und des Fahrers) möchte gerade so über ein Hindernis der Höhe h_C springen. Dazu fährt er in A mit seinem Rad mit der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit $v_A = 5m/s$ reibungsfrei eine Rampe der Höhe h_A hinunter um bei einer kleineren Rampe der Höhe $h_B = 1m$ unter dem Winkel $\alpha = 30°$ und der Geschwindigkeit v_B abzuspringen. Der Radfahrer bleibt bei seinem Stunt eine Zeitspanne von $T = 1,5s$ in der Luft bis er in D auf dem Boden aufkommt. Die Flugkurve ist durch die gestrichelte Linie dargestellt.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_B des Radfahrers am Ende der kleinen Rampe?

b) Welche Höhe h_A muss die Startrampe haben?

c) Welche horizontale Strecke l überwindet der Radfahrer bevor er auf dem Boden in D landet?

d) Wie groß ist die Höhe h_C des Hindernisses?

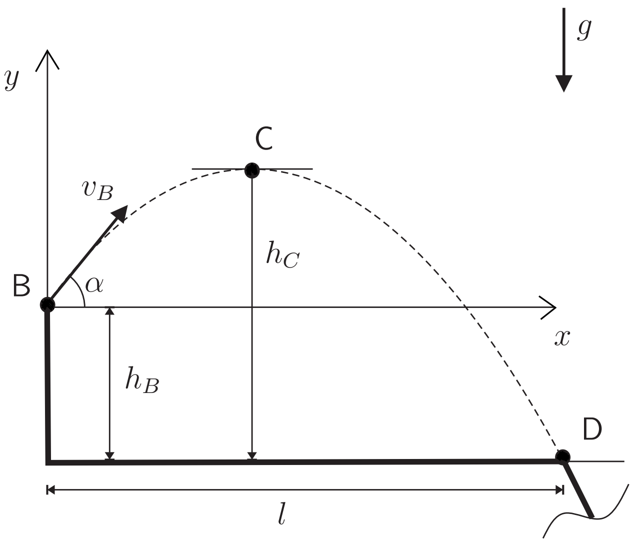
e) Wie groß ist die Auftreffgeschwindigkeit des Radfahrers am Boden in D?

Gegeben: $h_B = 1\,m, T = 1,5\,s, \alpha = 30°, v_A = 5\,m/s, g = 10m/s^2$.

Musterlösung - Aufgabe 1 (12 Punkte)

1. Aufgabe

a)

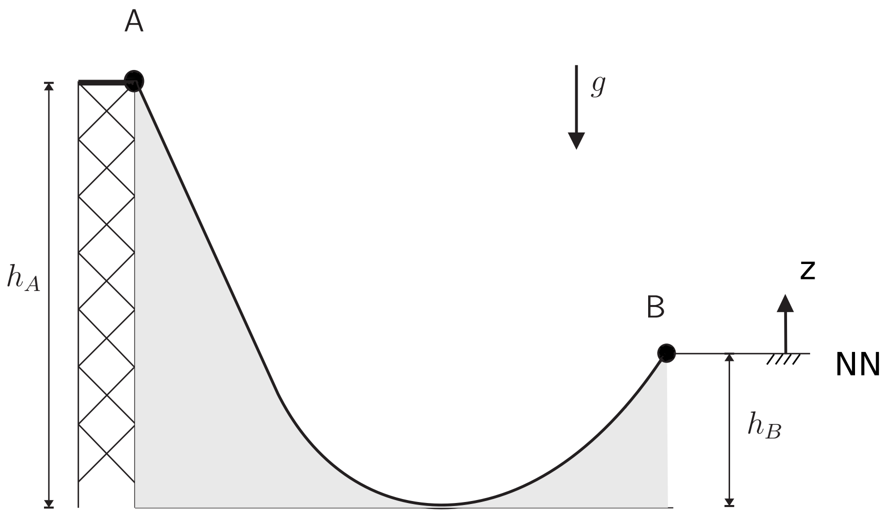


$$y_D = y_B + v_{B_y} t_{BD} + \frac{1}{2} a_y t_{BD}^2 = y_B + v_B \sin(\alpha) T - \frac{1}{2} g T^2$$

$$\text{mit } \mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} v_{B_x} \\ v_{B_y} \end{bmatrix} = v_B \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}; \quad t_{BD} = T = 1,5s; \quad y_D = -h_B = -1m; \quad a_y = -g$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \frac{1}{\sin(\alpha) T} [y_D - y_B + \frac{1}{2} g T^2]$$
$$= \frac{1}{\sin(30°) \cdot 1,5s} [-1m - 0m + \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (1,5s)^2] = 13,38 \frac{m}{s}$$

b)



$$E_{K1} = \frac{1}{2} m v_a^2 \qquad E_{P1} = mg(h_a - h_b)$$
$$E_{K2} = \frac{1}{2} m v_b^2 \qquad E_{P2} = 0$$

Energiebilanz: $E_{K1} + E_{P1} = E_{K2} + E_{P2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_a^2 + mg(h_a - h_b) = \frac{1}{2}mv_b^2$$
$$\Leftrightarrow \quad h_a = h_b + \frac{1}{2g}(v_b^2 - v_a^2)$$
$$= 1m + \frac{1}{2 \cdot 9,81\frac{m}{s^2}}[(13,38\frac{m}{s})^2 - (5\frac{m}{s})^2] = 8,85m$$

c)

$$x_D = x_B + v_{B_x}t_{BD} = l; \qquad v_{B_x} = v_B\cos(\alpha)$$
$$\Rightarrow \quad l = 13,38\frac{m}{s} \cdot \cos(30°) \cdot 1,5s = 17,38m$$

mit $\quad x_B = 0$ (KOS in B)

d)

$$v_{C_y}^2 \overset{!}{=} 0 = v_{B_y}^2 + 2 \cdot a_y[y_C - y_B]$$
$$= (13,38\frac{m}{s})^2 \cdot \sin^2(30°) - 2 \cdot 9,81\frac{m}{s^2}[(h_C - 1m) - 0m]$$

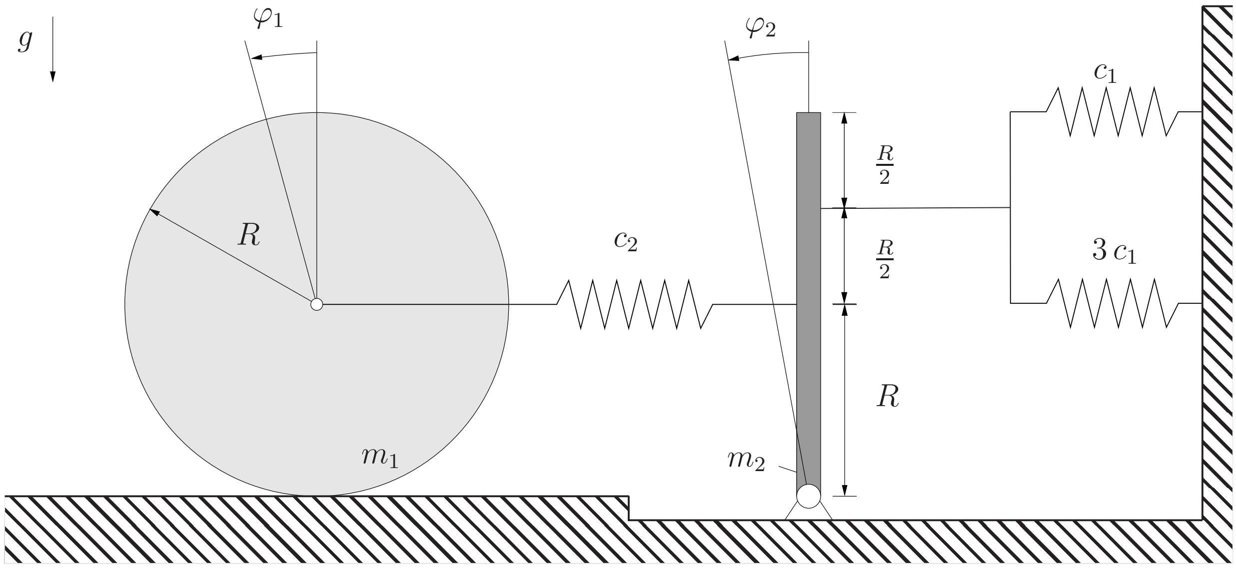
$$\Leftrightarrow \quad h_C = \frac{1}{2 \cdot 9,81\frac{m}{s^2}}(13,38\frac{m}{s} \cdot \sin(30°))^2 + 1m = 3,28m$$

e)

$$v_{Dx} = v_{B_x} = v_B \cdot \cos(\alpha) = 13,38\frac{m}{s} \cdot \cos(30°) = 11,59\frac{m}{s}$$

$$v_{Dy} = v_{C_y} - \sqrt{2gh_C} = -8,02\frac{m}{s}$$

2. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Gegeben ist das dargestellte System bestehend aus einem starren Stab (Masse m_2, Länge $2\,R$), welcher sich an der Wand über zwei Federn mit den Federsteifigkeiten c_1 und $3\,c_1$ abstützt, und eine Walze (Masse m_1, Radius R), die mit dem starren Stab durch eine weitere Feder mit der Steifigkeit c_2 verbunden ist. Die Federverlängerung ist nur in horizontaler Richtung zu berücksichtigen. Bestimmen Sie unter Verwendung der Koordinaten φ_1 und φ_2:

a) die potentielle Energie,

b) die kinetische Energie,

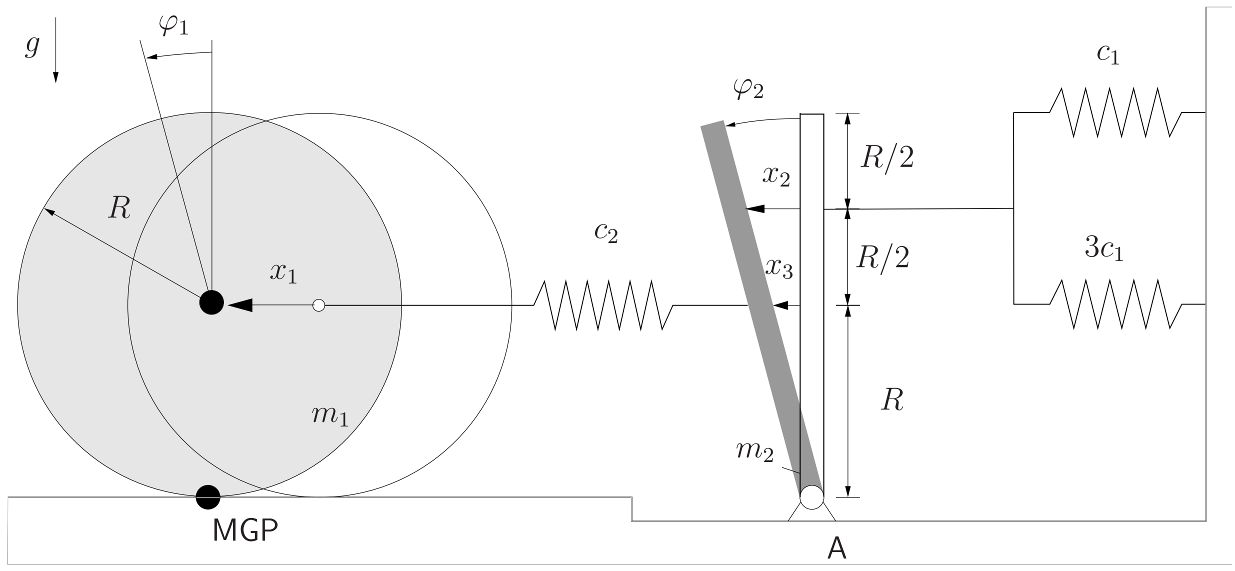
c) die Bewegungsgleichungen für große Auslenkungen,

d) die linearisierten Bewegungsgleichungen des Systems (φ_1, $\varphi_2 \ll 1$).

Gegeben: c_1, c_2, m_1, m_2, R, g

Musterlösung - Aufgabe 2 (10 Punkte)

a)



$$
\begin{aligned}
E^P_{Lage} &= -m_2 g(1-\cos\varphi_2)R \\
E^P_{Feder} &= \frac{1}{2}4c_1(\underbrace{\frac{3}{2}R\sin\varphi_2}_{x_2})^2 + \frac{1}{2}c_2(\underbrace{\varphi_1 R}_{x_1} - \underbrace{R\sin\varphi_2}_{x_3})^2 \\
E^P &= E^P_{Lage} + E^P_{Feder} \\
&= -m_2 g(1-\cos\varphi_2)R + \frac{9}{2}c_1 R^2\sin^2\varphi_2 + \frac{1}{2}c_2 R^2(\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2
\end{aligned}
$$

b)

$$E^K = \quad \frac{1}{2}\Theta^A_{Stab}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta^{MGP}_{Walze}\dot{\varphi}_1^2 = \quad \frac{2}{3}m_2R^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{3}{4}m_1R^2\dot{\varphi}_1^2$$

mit $\quad \Theta^A_{Stab} = \frac{1}{12}m_2(2R)^2 + m_2R^2 = \frac{4}{3}m_2R^2; \quad \Theta^{MGP}_{Walze} = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1R^2 = \frac{3}{2}m_1R^2$

c)

Lagrange-Funktion: $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad$ mit $\quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E^K}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial E^P}{\partial q} = 0$$

$$q_1 = \varphi_1 : \qquad \frac{\partial E^K}{\partial \dot\varphi_1} = \frac{3}{2} m_1 R^2 \dot\varphi_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E^K}{\partial \dot\varphi_1}\right) = \frac{3}{2} m_1 R^2 \ddot\varphi_1$$

$$\frac{\partial E^P}{\partial \varphi_1} = c_2 R^2 (\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$

$$q_2 = \varphi_2 : \qquad \frac{\partial E^K}{\partial \dot\varphi_2} = \frac{4}{3} m_2 R^2 \dot\varphi_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E^K}{\partial \dot\varphi_2}\right) = \frac{4}{3} m_2 R^2 \ddot\varphi_2$$

$$\frac{\partial E^P}{\partial \varphi_2} = -m_2 g \sin\varphi_2 R + 9 c_1 R^2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 - c_2 R^2 (\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{3}{2} m_1 R^2 \ddot\varphi_1 + c_2 R^2 (\varphi_1 - \sin\varphi_2) = 0$$

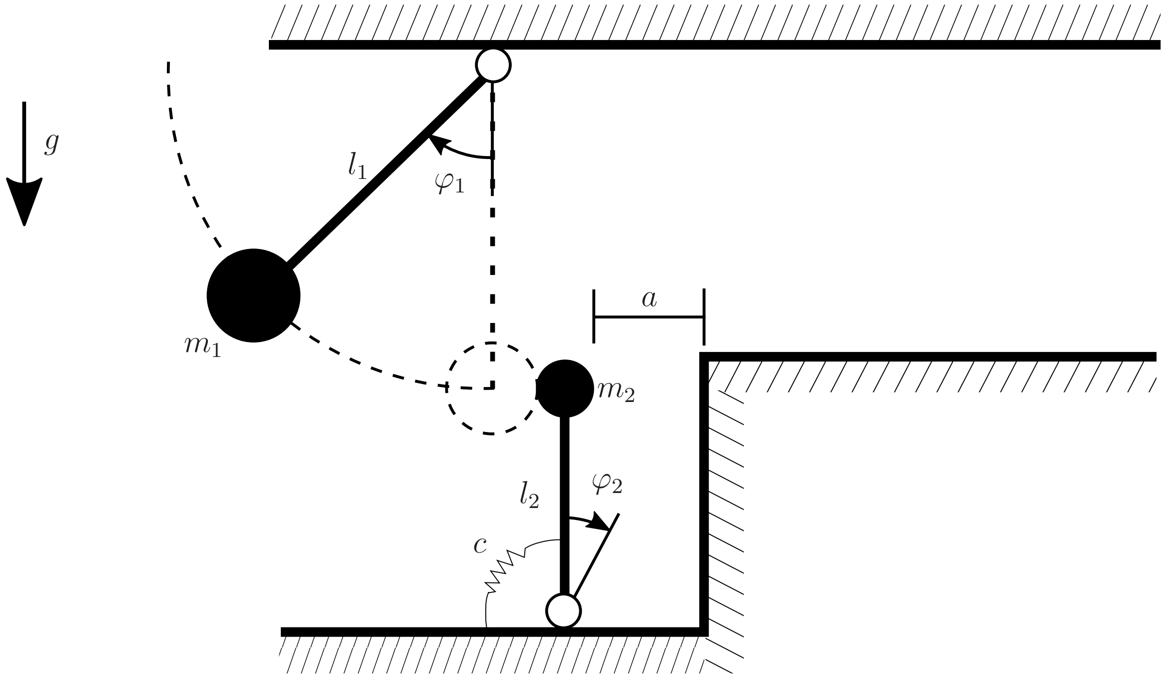
$$\frac{4}{3} m_2 R^2 \ddot\varphi_2 - m_2 g \sin\varphi_2 R + 9 c_1 R^2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 - c_2 R^2 (\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_2 = 0$$

d)

Linearisierung: $\sin\varphi \approx \varphi; \quad \cos\varphi \approx 1; \quad \sin\varphi\cos\varphi \approx \varphi$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m_1 R^2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} m_2 R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot\varphi_1 \\ \ddot\varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 R^2 & -c_2 R^2 \\ -c_2 R^2 & -m_2 g R + 9 c_1 R^2 + c_2 R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Oben ist das mechanische System einer Rückschlagklappe gegeben, das aus zwei masselosen Pendelstangen der Längen l_1, l_2 mit Kopfmassen m_1, m_2 besteht. Die Pendel sind so befestigt, dass sich die Kopfmassen in der vertikalen Gleichgewichtslage gerade so berühren. In der vertikalen Gleichgewichtslage des unteren Pendels ist die Drehfeder c entspannt und die untere Kopfmasse besitzt den Abstand a zur Wand.
Beim Schließvorgang bewegt sich das obere Pendel aus der waagerechten Ruhelage (Anfangsbedingungen $\varphi_{1,0} = \pi/2$ und $\dot{\varphi}_{1,0} = 0$) ungebremst auf das untere Pendel (Anfangsbedingungen $\varphi_{2,0} = 0$ und $\dot{\varphi}_{2,0} = 0$) zu wobei es zum teilelastischen Stoß beider Kopfmassen mit der Stoßzahl e kommt.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_1 der oberen Kopfmasse unmittelbar vor dem Stoß.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ beider Kopfmassen unmittelbar nach dem teilelastischen Stoß.

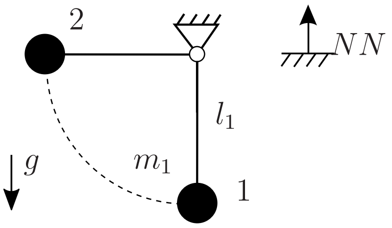
Verwenden Sie für die weitere Berechnung $l_1 = l_2 = l$ und $\bar{v}_1 = \frac{1}{2}\bar{v}_2 = \sqrt{2gl}$.

c) Welche maximalen Ausschläge $\varphi_{1,\max}$ und $\varphi_{2,\max}$ erreichen beide Kopfmassen nach dem Stoß? Unter welchen Vorrausetzungen kommt es zur Kollision des unteren Pendels mit der Wand? (Hinweis: $l_2 \gg a$ bzw. $\varphi_2 \ll 1$ darf angenommen werden)

Gegeben: $m_1,\ m_2,\ l_1,\ l_2,\ \varphi_{1,0} = \pi/2,\ \dot{\varphi}_{1,0} = \varphi_{2,0} = \dot{\varphi}_{2,0} = 0,\ e,\ g,\ l$

Musterlösung - Aufgabe 3 (10 Punkte)

a)



$$1)\quad E_{K,1} = 0 \qquad\qquad E_{P,1} = 0$$

$$2)\quad E_{K,2} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \qquad\qquad E_{P,2} = -m_1 g l_1$$

Energieerhaltung: $\quad 0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - m_1 g l_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gl_1}$

b)

Impulsbilanz Masse 1:

$$m_1(\overline{v}_1 - v_1) = \hat{F} \quad (1)$$

Impulsbilanz Masse 2:

$$m_2(\overline{v}_2 - 0) = -\hat{F} \quad (2)$$

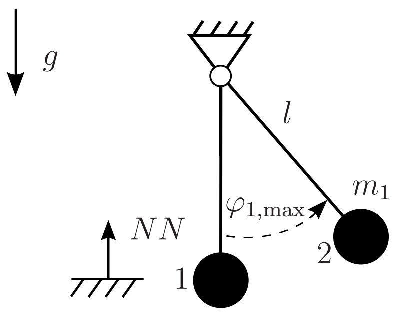
Stoßzahl: $\quad e = -\frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{v_1 - v_2} = -\frac{\overline{v}_1 - \overline{v}_2}{v_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{v}_2 = e \cdot v_1 + \overline{v}_1 \quad (3)$

$(1), (2)$ und (3): $\quad m_1(\overline{v}_1 - v_1) = -m_2\overline{v}_2 = -m_2(e \cdot v_1 + \overline{v}_1)$

$$\Rightarrow \qquad \overline{v}_1 = \frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2}\sqrt{2ghl_1}$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{v}_2 = \left(\frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2} + e\right) v_1 = (1+e)\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = (1+e)\frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gl_1}$$

c) oberes Pendel



$$\overline{v}_1 = \sqrt{2gl}$$

$$1)\quad E_{K,1} = \frac{1}{2} m_1 \overline{v}_1^2 \qquad\qquad E_{P,1} = 0$$

$$2)\quad E_{K,2} = 0 \qquad\qquad E_{P,2} = m_1 g [1 - \cos(\varphi_{1,max})] l$$

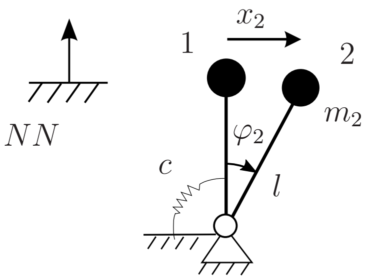
Energiebilanz:

$$\frac{1}{2} m_1 \overline{v}_1^2 = m_1 g [1 - \cos(\varphi_{1,max})] l$$

$$\cos(\varphi_{1,max}) = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_{1,max} = \frac{\pi}{2}$$

(oder analog Aufgabenteil a mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$)

unteres Pendel



$$1)\quad E_{K,1} = \frac{1}{2} m_2 \overline{v}_2^2 \qquad\qquad E_{P,1} = 0$$

$$2)\quad E_{K,2} = 0 \qquad\qquad E_{P,2} = \frac{1}{2} c \varphi_{2,max}^2 - \underbrace{[1 - \cos(\varphi_{2,max})] m_2 g l}_{\varphi_{2,max} << 1 \quad \rightarrow 0}$$

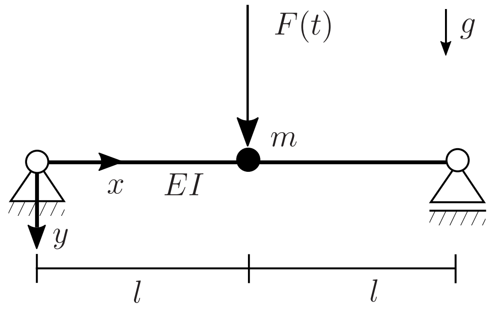
Energiebilanz: $\quad \overline{v}_2 = 2\sqrt{2gl}$

$$\frac{1}{2} m_2 \overline{v}_2^2 = \frac{1}{2} c \varphi_{2,max}^2 \qquad \rightarrow \varphi_{2,max} = \sqrt{\frac{m_2 8 g l}{c}}$$

$$x_2 = \sin(\varphi_{2,max}) l \approx \varphi_{2,max} l = \sqrt{\frac{m_2 8 g l^3}{c}} \geq a$$

Kollosion unter der Bedingung $\sqrt{\frac{m_2 8 g l^3}{c}} \geq a$

4. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Das oben dargestellte System ist das mechanische Modell einer Deckenkonstruktion mit einer Gesamtlänge von $2l$. Vereinfachend kann die Gesamtmasse der Decke als konzentrierte Einzelmasse m in Feldmitte angenommen werden. Des Weiteren sei die Biegesteifigkeit mit EI gegeben. Die Decke wird durch eine harmonische Erregung

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \qquad \forall t \geq 0$$

belastet.

a) Zeichnen Sie das Ersatzsystem und berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeit k (siehe Hinweis).

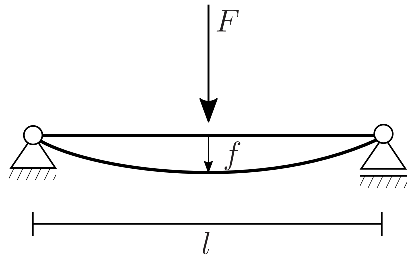
Für die nachfolgenden Berechnungen nehmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit mit k an.

b) Stellen Sie mithilfe der *synthetischen Methode* die Bewegungsgleichung der Decke bezüglich der Absolutkoordinate y auf.

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Decke in der statischen Ruhelage. Lösen Sie die in b) aufgestellte Bewegungsgleichung für die Absolutkoordinate y für $t \geq 0$. Beachten Sie hierbei, dass das System um die Ruhelage schwingt.

d) Was passiert wenn die Eigenfrequenz in der Nähe der Erregerfrequenz liegt? Mit welcher konstruktiven Maßnahme lässt sich die Eigenfrequenz beeinflussen, ohne dabei die Steifigkeit des Systems zu verändern?

Hinweis:



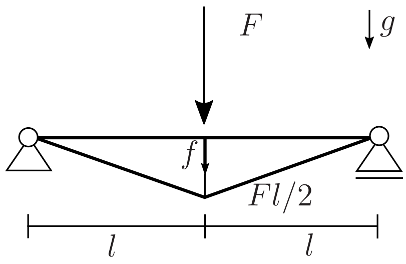
Für die Mittendurchbiegung f gilt: $f = \frac{Fl^3}{48EI}$ Gegeben: $l,\ m,\ F_0,\ EI,\ \Omega,\ g$

Musterlösung - Aufgabe 4 (8 Punkte)

a)

aus Hinweis: $f = \frac{F(2l)^3}{48EI} = \frac{Fl^3}{6EI} \rightarrow k = \frac{F}{f} = \frac{6EI}{l^3}$

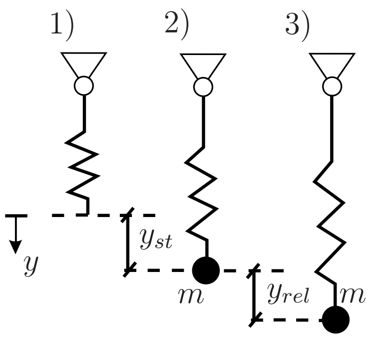
alternativ:



$$\frac{1}{2}F \cdot f = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx = 2\frac{1}{2}\frac{1}{3}(\frac{1}{2}Fl)^2\frac{l}{EI} = \frac{F^2l^3}{12EI} \rightarrow f = \frac{Fl^3}{6EI}$$

$$k \cdot f = F \quad \rightarrow k = \frac{F}{f} = \frac{6EI}{l^3}$$

b)



1) entlastet
2) statische Ruhelage
3) allgemeine Lage

allgemeine Lage:

$$\sum F_{iy} = m\ddot{y} : \quad F(t) - ky + mg = m\ddot{y} \qquad (1)$$

mit

$$y = y_{st} + y_{rel}$$
$$\dot{y} = 0 + \dot{y}_{rel}$$
$$\ddot{y} = 0 + \ddot{y}_{rel}$$

$$F(t) - k(y_{st} + y_{rel}) + mg = m\ddot{y}_{rel}$$

statische Ruhelage:

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -k_{st} y_{st} + mg = 0 \qquad (2)$$

(2) in (1):

$$\ddot{y}_{rel} + \omega^2 y_{rel} = \frac{F_0}{k}\frac{k}{m}\cos(\Omega t) = y_{rel,0}\ \omega^2 \cos(\Omega t) \text{ mit } \omega^2 = \tfrac{k}{m}, y_{rel,0} = \tfrac{F_0}{k} \quad \text{(3a)}$$

$$\text{Alternativ}: \quad \ddot{y} + \omega^2 y = y_{rel,0}\ \omega^2 \cos(\Omega t) + g \qquad (3b)$$

c)

Lösen der Bewegungsgleichung $(3a)$:

- partikulärer Ansatz: $y_{rel,p} = C\cos(\Omega t)$

  in $(3a)$:

$$-C\Omega^2\cos(\Omega t) + C\omega^2\cos(\Omega t) = y_{rel,0}\omega^2\cos(\Omega t)$$
$$\Rightarrow -C\Omega^2 + C\omega^2 = y_{rel,0}\omega^2$$
$$C = y_{rel,0}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}$$

- homogener Ansatz: $y_{rel,h} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
- Gesamtlösung: $y_{rel} = y_{rel,h} + y_{rel,p} = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + C\cos(\Omega t)$

Anfangsbedingungen

$$y_{rel}(t=0) \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow \qquad A = -C$$
$$\dot{y}_{rel}(t=0) \overset{!}{=} 0 \qquad \rightarrow \qquad B\omega + 0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad B = 0$$

$$y_{rel} = y_{rel,0}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}[\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)]$$

mit $y = y_{rel} + y_{st}$ folgt

$$y = y_{rel,0}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}[\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] + \frac{mg}{k}$$

Alternativ: Lösen der Bewegungsgleichung $(3b)$:

- partikulärer Ansatz: $y_{rel,p} = C\cos(\Omega t) + b$ in $(3b)$:

$$-C\Omega^2\cos(\Omega t) + C\omega^2\cos(\Omega t) + \omega^2 b = y_{rel,0}\omega^2\cos(\Omega t) + g$$
$$\Rightarrow \quad C = y_{rel,0}\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}; \qquad b = \frac{1}{\omega^2}g = \frac{mg}{k}$$

  ansonsten analog zu $(3a)$ bis auf $y(t=0) \overset{!}{=} \frac{mg}{k}$

d)

- Resonanzkatastrophe
- Erhöhung der Masse

5. Aufgabe: (ca. 12 % der Gesamtpunkte)

Bitte beantworten Sie die Kurzfragen auf dem **Lösungsbogen**.

a) Betrachtet werde ein diskretes mechanisches System mit n Freiheitsgraden. Gegeben seien der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ sowie die Massenmatrix $\mathbf{M}$ des Systems.

   1) Wie lautet die Formel für die kinetische Energie des Systems?

   2) Benennen Sie zwei wesentliche Eigenschaften der Massenmatrix.

b) Was versteht man unter generalisierten (Minimal-)Koordinaten?

c) Welche Klasse von Kräften tritt nicht im Prinzip der virtuellen Verschiebungen auf? Warum ist dies so?

d) Der Drallsatz für einen starren Körper lautet im Fall ebener Bewegung $M_A = \dot{L}_A$. Um welche Größe handelt es sich bei M_A und L_A? Welche ausgezeichneten Bezugspunkte können gewählt werden, damit der Drallsatz in der angegebenen Form gilt?

e) Was versteht man unter einer Führungskraft (auch Reaktions- oder Zwangskraft genannt)?

Musterlösung - Aufgabe 5 (5 Punkte)

a) a1)

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T\mathbf{M}\mathbf{v} \qquad \textit{oder} \qquad E_{kin} = \frac{1}{2}\sum M_i v_i^2$$

a2) positiv definit/ invertierbar; symmetrisch

b) Voneinander unabhängige Koordinaten (entsprechen der Anzahl der Freiheitsgrade)
$\Rightarrow$ Generalisierte Koordinaten sind n linear unabhängige Koordinaten eines Systems mit n Freiheitsgraden mit denen sich alle Ortsvektoren r_i aller Massen M_i darstellen lassen.

c) Führungskräfte/ Zwangskräfte treten nicht im Prinzip der virtuellen Verschiebungen auf. Diese Kräfte stehen senkrecht zur Bahn und verrichten daher keine Arbeit.

d) M_A : Moment um Punkt A
$\mathbf{L}_A$: Impulsmoment/ Drehimpulsvektor/ Drallvektor um Punkt A

$\Rightarrow$ raumfester Punkt oder Schwerpunkt

e) Führungskräfte sind Kräfte, die dafür sorgen, dass eine vorgegebene Bahn eingehalten wird.