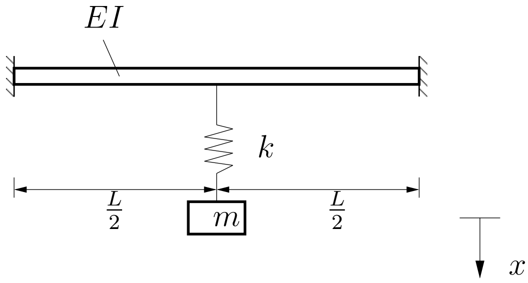
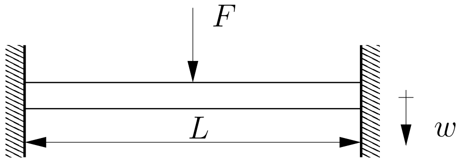
1. Aufgabe: (ca. 15% der Gesamtpunkte)

a) Was versteht man unter aktiver und passiver Schwingungsisolierung?

b) Eine Kiste (Masse m) wird durch eine Feder (Federsteifigkeit k) an einem masselosen Balken (Biegesteifigkeit EI) aufgehängt.



Skizzieren Sie ein Ersatzsystem mit nur einer (Ersatz-)Feder und bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit. Hinweis:

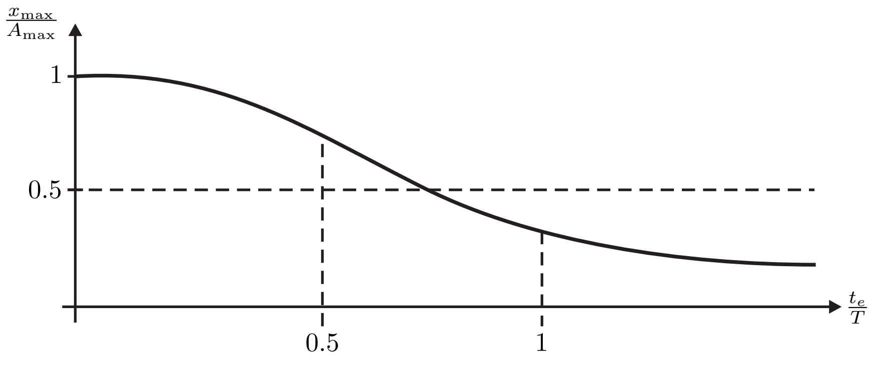


$$w(\tfrac{L}{2}) = \frac{F}{192\,EI/L^3}$$

c) Wie kann die niedrigste Eigenfrequenz eines Systems ohne Aufstellung des Eigenwertproblems der Koeffizientenmatrix des Systems, abgeschätzt werden (Formel und Erklärung)?

d) Was versteht man unter Filterwirkung bei einem fremderregten System?

e) Beim Vergleich von einem Stoß mit endlicher Stoßdauer (Amplitude x_{max}) zu einem plötzlichen Stoß (Dirac-Impuls mit Amplitude A_{max}) eines gedämpften Einmassenschwingers kommt es zu folgendem Diagramm



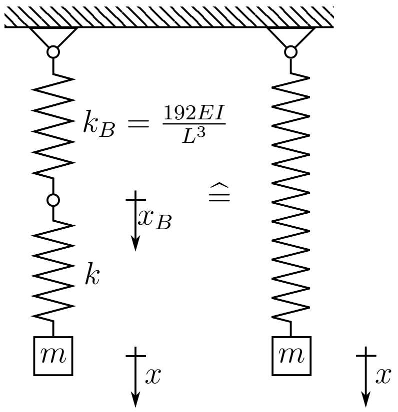
Dabei wird das Verhältnis der Amplituden über dem Verhältnis der Stoßdauer t_e zur Periodendauer T aufgetragen. Welche Schlüsse können daraus gezogen werden und was wäre ein Beispiel für eine Anwendung?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Ziel der passiven Schwingungsisolierung: Schutz eines Schwingers (Gebäudes) vor Belastungen infolge Fundamenterregungen.

Ziel der aktiven Schwingungsisolierung: Abschirmung von Maschinen (unwuchterregter Schwinger) vom Fundament.

b) Ersatzsystem



Reihenschaltung

$$\frac{1}{k_{\text{Ers}}} = \frac{1}{k_B} + \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow k_{\text{Ers}} = \frac{k k_B}{k_B + k} = \frac{192EIk}{kL^3 + 192EI}$$

c) Durch den Rayleighquotienten mit

$$R = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\varphi}} \geq \omega_1^2$$

wobei $\boldsymbol{\varphi}$ eine Schätzung für den ersten Eigenvektor ist.

d) Das Erregerspektrum wird mit der Übertragungsfunktion (Vergrößerungsfunktion) multipliziert wodurch gewisse spektrale Anteile unterdrückt werden (weit entfernt von Resonanzstelle) und andere Anteile (in der Nähe der Resonanzstelle) besonders hervorgehoben werden.

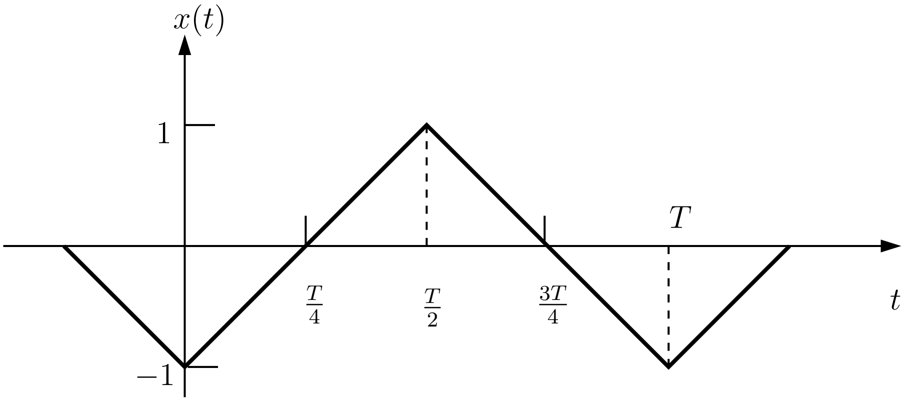
e)
- Amplitude x_{max} ist bei Stoßdauer $t_e = T$ nur noch ca. 32% der Amplitude A_{max} bei gleicher Stoßintensität und bei plötzlichem Stoß
- Anschaulich: kurze (harte) Stöße sind gefährlicher als langandauernde (weiche)
- Beispiel: Knautschzonen in Kraftfahrzeugen

2. Aufgabe: (ca. 10% der Gesamtpunkte)

Eine Dreieckschwingung ist unten dargestellt und beschrieben durch

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{T}t - 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 3 - \frac{4}{T}t & \text{für } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten der skizzierten Dreieckschwingung.



Hinweis:

$$\int x\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} + C, \quad \int x\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a} + C$$

Musterlösung - Aufgabe 2
gerade Funktion $x(-t) = x(t)$: $b_k = S_k = 0$
Flächengleichheit über und unter t-Achse im Intervall $[0, T]$, d.h. $a_0 = 0$

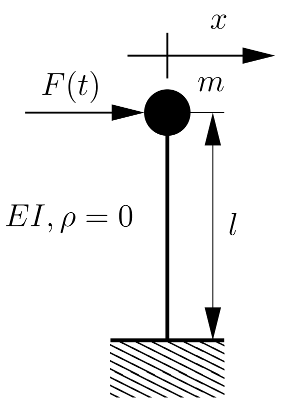
$$
\begin{aligned}
a_k = C_k =& \frac{2}{T} \int_0^T x(t)\, \cos(k\,\omega\, t)\ \mathrm{d}t \\
=& \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (\frac{4}{T}\, t - 1)\, \cos(k\,\omega\, t)\ \mathrm{d}t + \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T} (3 - \frac{4}{T}\, t)\, \cos(k\,\omega\, t)\ \mathrm{d}t \\
& |\, \text{mit:}\, a = k\,\omega = k\, \frac{2\,\pi}{T} \\
=& \frac{2}{T}\, (\frac{4}{T} \int_0^{T/2} t\, \cos(a\, t)\ \mathrm{d}t - \int_0^{T/2} \cos(a\, t)\ \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} 3\, \cos(a\, t)\ \mathrm{d}t - \frac{4}{T} \int_{T/2}^{T} t\, \cos(a\, t)\ \mathrm{d}t) \\
=& \frac{2}{T}\, \{ \frac{4}{T} \left[\frac{\cos(a\, t)}{a^2} + \frac{t\, \sin(a\, t)}{a} \right]_0^{T/2} - \frac{1}{a}\, \sin(a\, t)\Big|_0^{T/2} \\
& + \frac{3}{a}\, \sin(a\, t)\Big|_{T/2}^{T} - \frac{4}{T} \left[\frac{\cos(a\, t)}{a^2} + \frac{t\, \sin(a\, t)}{a} \right]_{T/2}^{T} \} \\
=& \frac{2}{T}\, \{ \frac{4}{T} \left[\frac{\cos(\pi\, k)}{a^2} + \frac{T/2\, \overbrace{\sin(\pi\, k)}^{0}}{a} - \frac{\overbrace{\cos(0)}^{1}}{a^2} - 0 \right] - \frac{1}{a}\, (\overbrace{\sin(\pi\, k)}^{0} - \overbrace{\sin(0)}^{0}) \\
& + \frac{3}{a}\, (\overbrace{\sin(2\,\pi\, k)}^{0} - \overbrace{\sin(\pi\, k)}^{0}) - \frac{4}{T} \left[\frac{\overbrace{\cos(2\,\pi\, k)}^{1}}{a^2} + \frac{T\, \overbrace{\sin(2\,\pi\, k)}^{0}}{a} - \frac{\cos(\pi\, k)}{a^2} - \frac{T/2\, \overbrace{\sin(\pi\, k)}^{0}}{a} \right] \} \\
=& \frac{2}{T}\, \{ \frac{4}{T}\, \frac{1}{a^2}\, (2\, \cos(\pi\, k) - 2) \} = \frac{4}{k^2\, \pi^2}\, (\cos(k\, \pi) - 1) \\
=& \begin{cases} 0 & \text{für gerade ganze Zahl } k \\ -\frac{8}{k^2\, \pi^2} & \text{für ungerade ganze Zahl } k \end{cases}
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe: (ca. 25% der Gesamtpunkte)

Als einfaches Modell eines schmalen langen Bauwerks (z.B. schlanker Schornstein) ist eine Einzelmasse m über einer elastischen (Biegesteifigkeit EI), masselosen (Dichte $\rho = 0$) und dehnsteifen (Dehnsteifigkeit $EA \to \infty$) Stütze der Länge l mit dem Boden verbunden. Ferner greift an der Masse eine stoßartige bleibende Last (z.B. plötzliche Windlast) an, gegeben durch die ideale Sprungfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ F_0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Es soll angenommen werden, dass sich die Masse m nur in horizontaler Richtung verschiebt.



Gegeben: EI, l, m, F_0.

a) Skizzieren Sie ein eindimensionales Ersatzmodell des Systems und bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit k des gesamten Systems.

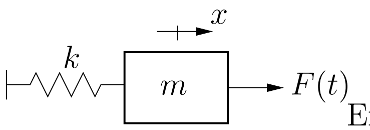
b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate x durch die synthetische Methode (Freischnitt/Newtonsche Axiome).

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

d) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

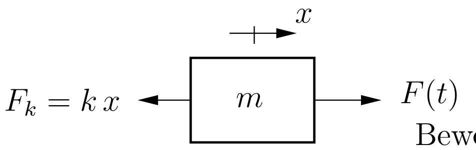
Musterlösung - Aufgabe 3

a) Ersatzmodell



Ersatzfedersteifigkeit $k = \frac{3\,EI}{l^3}$

b) FKB



Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} + k\,x = F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ F_0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

c) Normalform (für $t > 0$)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}$$

Homogene Lösung

$$x_h = C\,\cos(\omega\,t - \alpha), \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Partikuläre Lösung (Ansatz in Form der rechten Seite $\rightarrow$ Konstante K)

$$x_p = K$$

einsetzen in DGL liefert

$$\omega_0^2\,K = \frac{F_0}{m} \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{F_0}{m\,\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = x_0$$

Allgemeine Lösung

$$x_a = x_h + x_p$$

d) Spezielle Lösung

$$x(0) = 0 = x_a(0) = C\,\cos(-\alpha) + x_0 \quad \Leftrightarrow C = -\frac{x_0}{\cos(\alpha)}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \dot{x}_a(0) = -C\,\omega_0\,\sin(-\alpha) = \omega_0\,x_0\,\tan(-\alpha)$$

$$\alpha = -\arctan(\frac{v_0}{\omega_0\,x_0}), \quad C = -\frac{x_0}{\cos(\arctan(\frac{v_0}{\omega_0\,x_0}))} = -\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + x_0^2}$$

$$\text{mit: } \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Alternative:

$$x = A\,\sin(\omega_0\,t) + B\,\cos(\omega_0\,t) + x_0$$

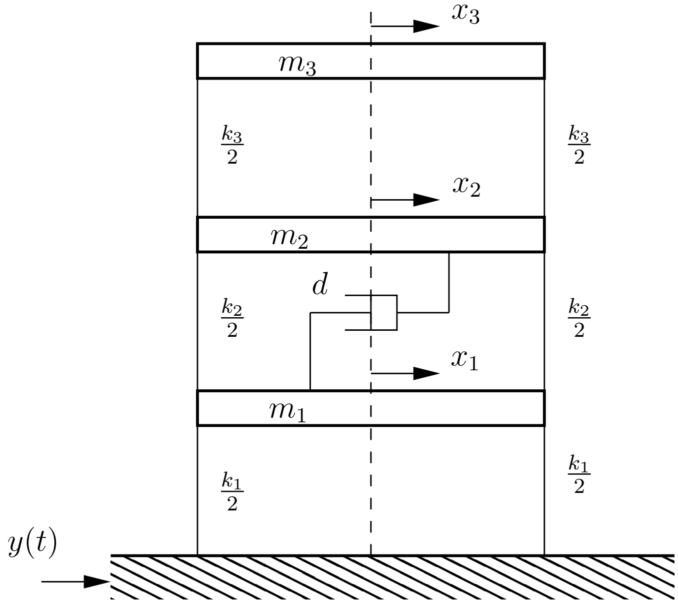
$$x(0) = 0 = B + x_0 \quad \Leftrightarrow B = -x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = A\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,0) - B\,\omega_0\,\sin(\omega_0\,0) = A\,\omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\text{Umrechnung:} \quad C^2 = A^2 + B^2, \quad \alpha = \arctan(\frac{A}{B}) = -\arctan(\frac{v_0}{\omega_0\,x_0})$$

4. Aufgabe: (ca. 50% der Gesamtpunkte)

Der skizzierte Stockwerkrahmen (dreistöckiges Gebäude) besteht aus starren Riegeln mit Massen m_1, m_2, m_3, masselosen Stielen mit Steifigkeiten $\frac{k_1}{2}$, $\frac{k_2}{2}$, $\frac{k_3}{2}$ und einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d. Es soll angenommen werden, dass sich die Massen m_1, m_2 und m_3 nur in horizontaler Richtung verschieben. Die Koordinaten der Massen x_1, x_2 und x_3 sind Auslenkungen gegenüber dem Fundament. Das Fundament wird durch eine Fußpunkterregung (Erdbeben) mit der Koordinate $y(t) = y_0\,\cos(\Omega\,t)$ mit Bewegungsamplitude y_0 und Erregerfrequenz Ω zum Schwingen angeregt.



Gegeben: k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, d, $y(t) = y_0\,\cos(\Omega\,t)$, y_0, Ω.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange Formalismus 2. Art auf.

b) Liegt durchdringende oder vollständige Dämpfung vor? Warum?

Im Weiteren wird die Fremderregung (Erdbeben) sowie die Dämpfung entfernt. Es liege folgendes System von Bewegungsgleichungen vor

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2\,k & -k & 0 \\ -k & 2\,k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

wobei $m = 1$ und $k = 1$ angenommen werden soll.

c) Schätzen Sie mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten die erste Eigenkreisfrequenz ab.

d) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems.

e) Bestimmen Sie die Modalvektoren und stellen Sie diese grafisch dar.

f) Zur einfachen Lösung der Bewegungsgleichungen sollen diese entkoppelt werden. Zeigen Sie kurz die wesentlichen Schritte dazu auf.

Musterlösung - Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\, m_1\, (\dot{y}+\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, (\dot{y}+\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}\, m_3\, (\dot{y}+\dot{x}_3)^2 \\
R &= \frac{1}{2}\, d\, (\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2 \\
V &= \frac{1}{2}\, k_1\, x_1^2 + \frac{1}{2}\, k_2\, (x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}\, k_3\, (x_3-x_2)^2
\end{aligned}$$

Lagrange-Gleichungen mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}) + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} = 0, \quad k = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
&m_1\,(\ddot{y}+\ddot{x}_1) \qquad -d\,(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + k_1\, x_1 - k_2\,(x_2-x_1) = 0 \\
&m_2\,(\ddot{y}+\ddot{x}_2) \qquad +d\,(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + k_2\,(x_2-x_1) - k_3\,(x_3-x_2) = 0 \\
&m_3\,(\ddot{y}+\ddot{x}_3) \qquad + k_3\,(x_3-x_2) = 0
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & -d & 0 \\ -d & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{-\ddot{y}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}}$$

mit $\ddot{y} = -\Omega^2\, y_0\, \cos(\Omega\, t)$

b) Notwendige Bedingung für durchdringende Dämpfung: $R = \frac{1}{2}\, \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D}\, \dot{\boldsymbol{x}} \geq 0\, \forall \dot{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{0}$

R muss positiv semidefinit sein, d.h. alle Eigenwerte von $\boldsymbol{D}$ müssen größer Null und mind. ein Eigenwert muss Null sein

EWP für $\boldsymbol{D}$

$$\det(\boldsymbol{D} - \lambda\, \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} d-\lambda & -d & 0 \\ -d & d-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad | \text{ Lsg. mit Hilfe von Unterdeterminanten}$$

$$+0 \begin{vmatrix} -d & 0 \\ d-\lambda & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} d-\lambda & 0 \\ -d & 0 \end{vmatrix} + -\lambda \begin{vmatrix} d-\lambda & -d \\ -d & d-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,((d-\lambda)^2 - d^2) = -\lambda^3 + 2\, d\, \lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^2\,(\lambda - 2\,d) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = 2\,d$$

Es liegt zudem Kopplung in $\boldsymbol{K}$ vor.

Nicht gefordert in Klausur:

Hinreichende Bedingung für durchdringende Dämpfung: Falls EVen (der Nulleigenwerte) von $\boldsymbol{D}$ und EVen der Koeffizientenmatrix des ungedämpften Systems nicht jeweils linear abhängig sind.

EVen von $\boldsymbol{D}$

$$\lambda_1 = 0, \;\; \boldsymbol{\Phi}_1 = [0, 0, 1], \quad \lambda_2 = 0, \;\; \boldsymbol{\Phi}_2 = [1, 1, 0], \quad (\lambda_3 = 2\,d, \;\; \boldsymbol{\Phi}_3 = [-1, 1, 0])$$

EVen von $\boldsymbol{K} - \omega^2\, \boldsymbol{M}$ siehe Aufgabe e) $\rightarrow$ nicht jeweils linear abhängig von $\boldsymbol{\Phi}_1$ und $\boldsymbol{\Phi}_2$ $\rightarrow$ System ist durchdringend gedämpft.

c) Schätze

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \text{etc.}$$

Rayleigh-Quotient

$$\tilde{R}_1 = \frac{\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\varphi}} = \frac{3\,k}{14\,m} = \frac{3}{14}\, \omega_0^2 \geq \omega_1^2 \quad \text{oder} \quad \tilde{R}_2 = \frac{1}{3}\, \omega_0^2 \geq \omega_1^2 \quad \text{etc.}$$

d) Eigenwertproblem (EWP) mit Ansatz: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{C}\cos(\omega t - \alpha)$

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{C} = 0$$

charakteristische Gleichung für nichttriviale Lösungen

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2\,\boldsymbol{M}) = -\omega^6 + 5\omega^4 - 6\omega^2 + 1 = 0$$

Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1^2 = 0.199, \quad \omega_2^2 = 1.555, \quad \omega_3^2 = 3.247$$
$$\Rightarrow \omega_1 = 0.446\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$$

e) Für Eigenformen jeweils Eigenfrequenzen in $(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{C} = 0$ einsetzen. Für ω_1:

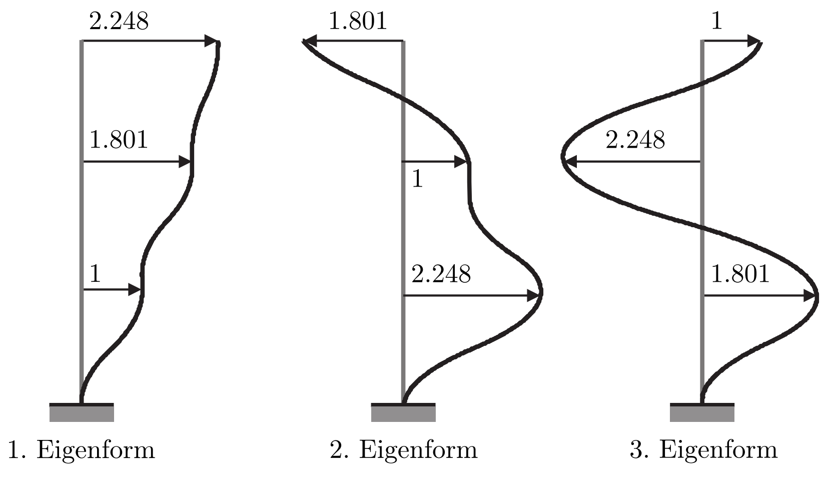
$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 0.199\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ Q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.801 & -1 & 0 \\ -1 & 1.801 & -1 \\ 0 & -1 & 0.801 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ Q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wahl von Q_{11} als unbestimmte Konstante, so lautet die nichttriviale Lösung $Q_{11} = Q_{11}, \quad Q_{21} = 1.801\,Q_{11}, \quad Q_{31} = 2.248\,Q_{11}$ bzw.

$$\mathbf{Q}_1 = Q_{11}\,\boldsymbol{\Phi}_1 = Q_{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 1.801 \\ 2.248 \end{bmatrix}$$

Analog für ω_2 und ω_3

$$\mathbf{Q}_2 = Q_{12}\,\boldsymbol{\Phi}_2 = Q_{12}\begin{bmatrix} 2.248 \\ 1 \\ -1.801 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = Q_{13}\,\boldsymbol{\Phi}_3 = Q_{13}\begin{bmatrix} 1.801 \\ -2.248 \\ 1 \end{bmatrix}$$



f) Modale Transformation mit der Modalmatrix $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2, \boldsymbol{\Phi}_3]$

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{0}$$

Das System zerfällt in 3 Einzelgleichungen

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = 0 \quad k = 1, 2, 3$$