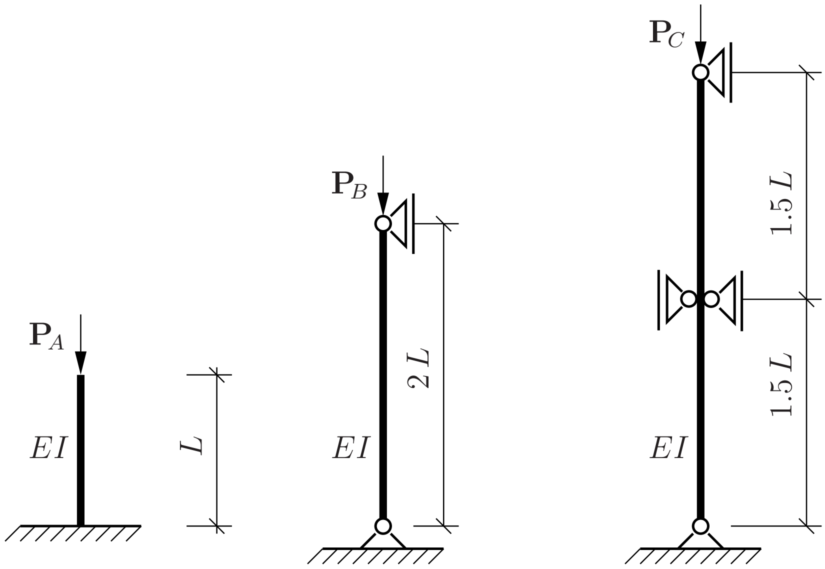
1. Aufgabe: (ca. 11 % der Gesamtpunkte)

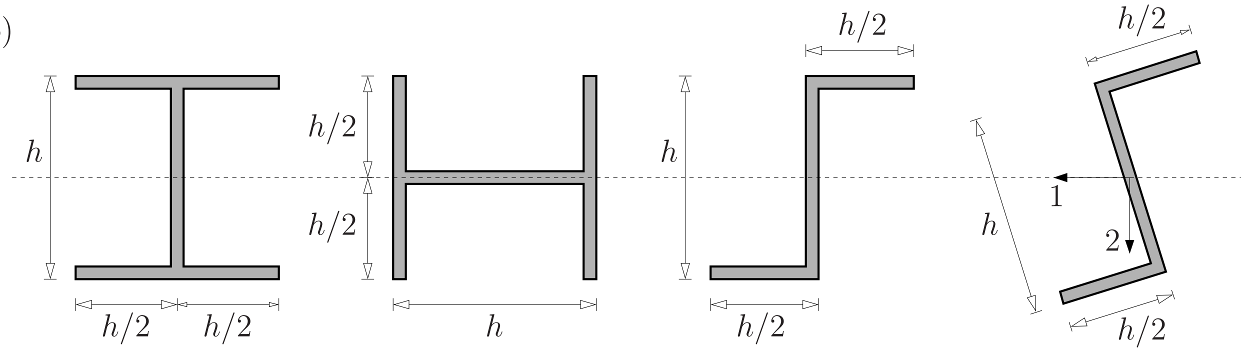
a)



A **B** **C**

Gegeben sind die oben abgebildeten Stützensysteme **A**, **B** und **C** aus einzelnen Euler-Stäben mit jeweils identischer Biegesteifigkeit EI. Ordnen Sie die zugehörige Knicklasten $\mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}_B$, $\mathbf{P}_C$ der Größe nach und begründen Sie Ihre Antwort.

b)



A **B** **C** **D**

Ordnen Sie die gegebenen dünnwandigen Querschnitte **A**, **B**, **C**, **D** (konstante Wandstärke $t \ll h$) bezüglich des Flächenträgheitsmoments um die skizzierte horizontale Achse und begründen Sie Ihre Antwort.

1. Aufgabe Lösungsvorschlag:

a) $$P = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

$$A: l = 2L \qquad P_A = 0{,}25 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$B: l = 2L \qquad P_B = 0{,}25 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$C: l = 1{,}5L \qquad P_C = 0{,}44 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad\qquad P_A = P_B < P_C$$

b)

$$I^A_{hor} \approx \frac{th^3}{12} + 2\,\frac{ht^3}{12} + 2ht\left(\frac{h}{2}\right)^2 \approx \frac{7}{12}\,th^3$$

$$I^B_{hor} \approx 2\,\frac{th^3}{12} + \frac{ht^3}{12} \approx \frac{2}{12}\,th^3$$

$$I^C_{hor} \approx \frac{th^3}{12} + 2\,\frac{\frac{h}{2}\,t^3}{12} + 2\,\frac{h}{2}\,t\left(\frac{h}{2}\right)^2 \approx \frac{4}{12}\,th^3 \qquad \rightarrow I^D_{hor} = I^C_1 > I^C_{hor}; \qquad I^C_{hv} \neq 0$$

$$I^C_{vert} \approx \frac{ht^3}{12} + \frac{2\,(\frac{h}{2})^3 t}{12} + 2\,\frac{h}{2}\,t\left(\frac{h}{4}\right)^2 \approx \frac{1}{12}\,th^3$$

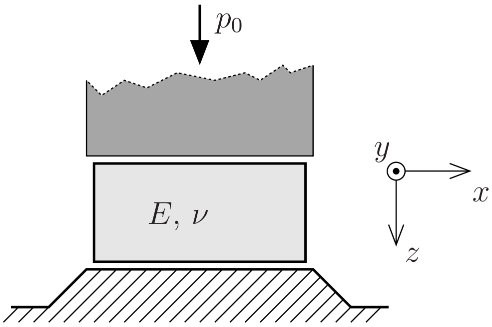
Invarianz: $$I^C_{hor} + I^C_{vert} = I^C_1 + I^C_2$$

$$I^D_{horz} = I = I^C_{hor} + I^C_{vert} - I^C_2 \approx \frac{4}{12}\,th^3 + \frac{1}{12}\,th^3 \underbrace{-I^C_2}_{>0} < \frac{5}{12}\,th^3$$

$$\Rightarrow I^C_{hor} < I^D_{hor} < \frac{5}{12}\,th^3$$

$$I^A > I^D > I^C > I^B$$

2. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Ein homogener linear-elastischer Quader (E, ν) wird einem Druck p_0 in z-Richtung ausgesetzt. Aufgrund der geringen Höhe des Quaders kann davon ausgegangen werden, dass ein homogener (ortsunabhängiger) Spannungs- bzw. Verzerrungszustand herrscht.

Wie groß sind die Dehnungen und die Spannungen, wenn

a) die Verformungen in x- und y-Richtung behindert sind?

b) nur die Verformung in y-Richtung behindert ist?

c) die Verformungen in x- und y-Richtung nicht behindert sind?

Gegeben: p_0, E, ν

2. Aufgabe Lösungsvorschlag:

$$\sigma_z = -p_0$$

$$E\ \varepsilon_x = \sigma_x - \nu\ \sigma_y - \nu\ \sigma_z = \sigma_x + \nu\ (p_0 - \sigma_y) \qquad (1)$$

$$E\ \varepsilon_y = \sigma_y - \nu\ \sigma_x - \nu\ \sigma_z = \sigma_y + \nu\ (p_0 - \sigma_x) \qquad (2)$$

$$E\ \varepsilon_z = \sigma_z - \nu\ \sigma_x - \nu\ \sigma_y = -p_0 - \nu\ (\sigma_x + \sigma_y) \qquad (3)$$

a) $\varepsilon_x = \varepsilon_y \overset{!}{=} 0:$

$$\xrightarrow{(1)} \sigma_x = \nu\ (\sigma_y - p_0) \qquad (4)$$

$$\sigma_y = \nu\ (\sigma_x - p_0) \overset{(4)}{=} \nu^2\ \sigma_y - \nu^2\ p_0 - \nu\ p_0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_y = -\frac{\nu^2 + \nu}{1 - \nu^2}\ p_0 = -\frac{\nu\ (1+\nu)}{(1-\nu)(1+\nu)}\ p_0 = -\frac{\nu}{1-\nu}\ p_0 \qquad (5)$$

$$\xrightarrow{(4)} \sigma_x \overset{(5)}{=} -\frac{\nu^2}{1-\nu}\ p_0 - \frac{\nu\ (1-\nu)}{1-\nu}\ p_0 = -\frac{\nu}{1-\nu}\ p_0\ (= \sigma_y) \qquad (6)$$

$$\xrightarrow{(3)} \varepsilon_z \overset{(6)}{=} -\frac{p_0}{E} + \frac{\nu}{E}\left(\frac{2\ \nu}{1-\nu}\right)\ p_0 = \frac{-(1-\nu) + 2\nu^2}{1-\nu}\ \frac{p_0}{E} = -\frac{1 - \nu - 2\ \nu^2}{1-\nu}\ \frac{p_0}{E}$$

b) $\varepsilon_y \overset{!}{=} 0; \quad \sigma_x \overset{!}{=} 0:$

$$\xrightarrow{(2)} \sigma_y = -\nu\ p_0 \qquad (7)$$

$$\xrightarrow{(1)} \varepsilon_x = \frac{\nu}{E}(p_0 - \sigma_y) \overset{(7)}{=} \nu\ (1+\nu)\frac{p_0}{E}$$

$$\xrightarrow{(3)} \varepsilon_z = -\frac{p_0}{E} - \frac{\nu}{E}\ \sigma_y \overset{(2)}{=} -(1-\nu^2)\frac{p_0}{E}$$

c) $\sigma_x = \sigma_y \overset{!}{=} 0:$

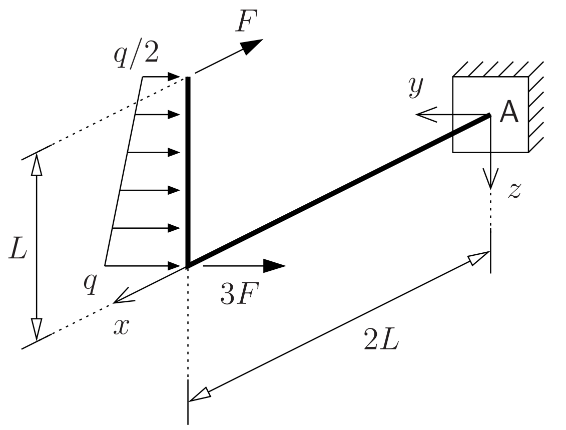
$$\xrightarrow{(1)} \varepsilon_x = \nu\ \frac{p_0}{E}$$

$$\xrightarrow{(2)} \varepsilon_y = \nu\ \frac{p_0}{E}(= \varepsilon_x)$$

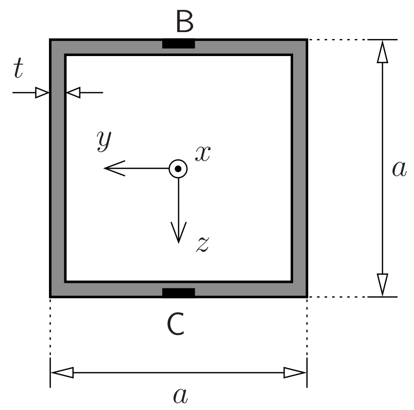
$$\xrightarrow{(3)} \varepsilon_z = -\frac{p_0}{E}$$

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)

System



Querschnitt bei A



Der dargestellte Kragarm ist in A eingespannt und wird durch eine Streckenlast q und eine Einzellast $3F$ in negativer y-Richtung sowie eine Einzellast F in negativer x-Richtung belastet.

a) Bestimmen Sie die Schnittgrößen an der Einspannstelle A.

b) Bestimmen Sie die Schubspannungen an der Einspannstelle in den Punkten B und C.

Hinweis: Der Querschnitt darf als dünnwandig betrachtet werden ($t \ll a$).

Gegeben: $L = 2.7\,m,\ a = 100\,mm,\ t = 5\,mm,\ q = 100\,\dfrac{N}{m},\ F = 400\,N.$

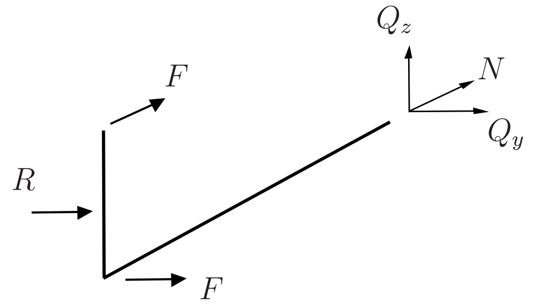
3. Aufgabe Lösungsvorschlag:

a)

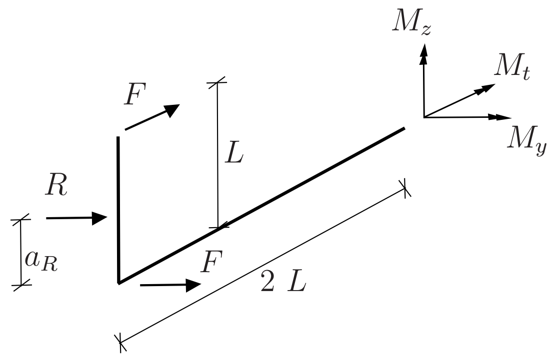
Schnittgrößen an der Einspannstelle A:

$$R = \frac{3}{4}\,qL = \frac{3}{4}\,100 \cdot 2{,}7\,\frac{N}{m}m = 202{,}5\ N$$

$$a_R = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{L}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{L}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\,\frac{4}{3}\,L = \frac{4}{9}\,L = 1{,}2\ m$$



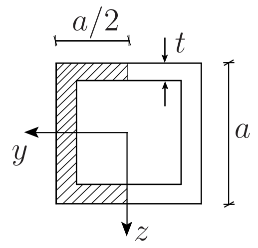
$$\sum F_x = 0: \quad N = -F = -400\ N$$
$$\sum F_y = 0: \quad Q_y = -R - 3\ F = -1402{,}2\ N$$
$$\sum F_z = 0: \quad Q_z = 0$$



$$\sum M_x^A = 0: \quad M_t = -R\ a_R = -243\ Nm$$
$$\sum M_y^A = 0: \quad M_y = F\ L = 1080\ Nm$$
$$\sum M_z^A = 0: \quad M_z = -(R + 3F)\ 2L = -7573{,}5\ Nm$$

b)

- Schubspannung infolge Querkraft:



$$\tau_Q = \frac{Q_y \cdot S_z}{I_z \cdot b(y)} = -\frac{1402{,}5 \cdot 33875}{2865833 \cdot 10} \; \frac{Nmm^3}{mm^5} \approx -1{,}66 \frac{N}{mm^2}$$

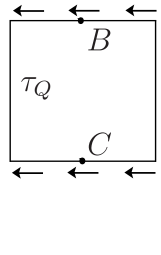
$$\begin{aligned}
S_z &= A^{außen}\; y_S^{au} - A^{innen}\; y_S^{in} = a\;\frac{a}{2}\;\frac{a}{2\cdot 2} - (a-2t)\;\frac{a-2t}{2}\;\frac{a-2t}{2\cdot 2} \\
&= \frac{1}{8}\;(100^3 - 90^3)mm^3 = 33875\; mm^3 \\
I_y &= \frac{1}{12}\;(a \cdot a^3 - (a-2t)(a-2t)^3) = \frac{1}{12}\;(100^4 - 90^4)mm^4 \\
&= \frac{1}{12}\;(100^4 - 90^4)mm^4 \approx 2865833\; mm^4 \\
b(y) &= 2t = 10\; mm
\end{aligned}$$

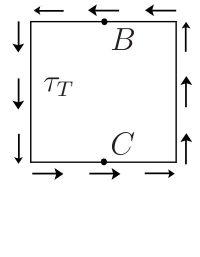
- Schubspannung infolge Torsion: dünnwandig → 1. Bredt'sche Formel

$$\tau_T = \frac{M_T}{2A_m \cdot t_{min}} = -\frac{243000}{2 \cdot 9025 \cdot 5} \frac{Nmm}{mm^3} \approx -2{,}69\; \frac{N}{mm^2}$$

$$\begin{aligned}
A_m &= \left(a - \frac{2t}{2}\right)^2 = 95^2\; mm^2 = 9025\; mm^2 \\
t_{min} &= 5\; mm
\end{aligned}$$

- Superpostition:

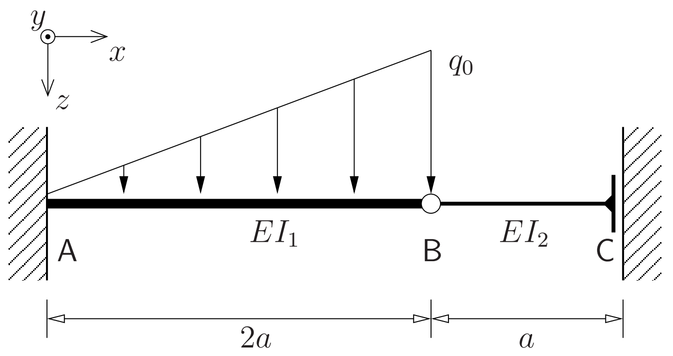




$$\tau_B = \tau_Q + \tau_T = (-1{,}66 - 2{,}69)\; \frac{N}{mm^2} = -4{,}35\; \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_C = \tau_Q - \tau_T = (-1{,}66 + 2{,}69)\; \frac{N}{mm^2} = 1{,}03\; \frac{N}{mm^2}$$

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Der oben dargestellte Zweifeldträger mit Gelenk ist einseitig durch eine lineare Streckenlast $q(x)$ belastet.

a) Geben Sie sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen in den Punkten A, B und C an.

b) Ermittelns Sie die Biegelinie $w(x)$ für den gesamten Träger.

c) Skizzieren Sie qualitativ die Biegelinie.

d) Für welche Biegesteifigkeit EI_1 stellt sich eine Absenkung $w_c = w(x{=}3a) = \dfrac{2}{15}a$ am Punkt C ein?

e) Wie ändert sich die Durchbiegung $w_b = w(x{=}2a)$ am Punkt B bei Verdoppelung der Biegesteifigkeit EI_2? (bitte nachfolgend ankreuzen!)

☐ wird kleiner ☐ bleibt gleich ☐ wird größer

Gegeben: q_0, a, EI_1, EI_2

4. Aufgabe Lösungsvorschlag:

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{für} \quad 0 \le x \le 2a \quad \rightarrow \quad \mathrm{I} \\ w_2(x) & \text{für} \quad 2a \le x \le 3a \quad \rightarrow \quad \mathrm{II} \end{cases}$$

a)

$$\begin{aligned}
w_1(x=0) &= 0 && (1) \\
w_1^I(x=0) &= 0 && (2) \\
w_1(x=2a) &= w_2(x=2a) && (3) \\
EI_1 w_1^{II}(x=2a) &= 0 && (4) \quad \rightarrow \quad \text{8 Bed. für 8 Integrationskonstanten} \\
EI_2 w_2^{II}(x=2a) &= 0 && (5) \\
EI_1 w_1^{III}(x=2a) &= EI_2 w_2^{III}(x=2a) && (6) \\
w_2^I(x=3a) &= 0 && (7) \\
EI_2 w_2^{III}(x=3a) &= 0 && (8)
\end{aligned}$$

b)

Bereich I

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{q_0}{2a} x \\
EI_1 w_1^{IV}(x) &= \frac{q_0}{2a} x \\
EI_1 w_1^{III}(x) &= \frac{q_0}{4a} x^2 + C_1 \\
EI_1 w_1^{II}(x) &= \frac{q_0}{12a} x^3 + C_1\ x + C_2 \\
EI_1 w_1^{I}(x) &= \frac{q_0}{48a} x^4 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2\ x + C_3 \\
EI_1 w_1(x) &= \frac{q_0}{240a} x^5 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3\ x + C_4
\end{aligned}$$

Bereich II

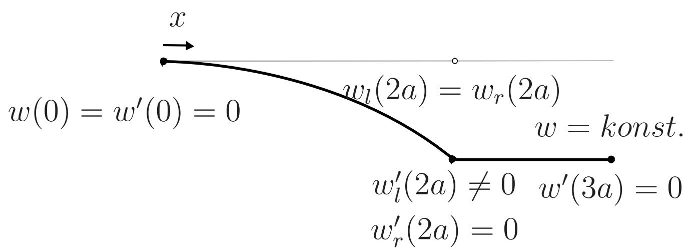
$$\begin{aligned}
q(x) &= 0 \\
EI_2 w_2^{IV}(x) &= 0 \\
EI_2 w_2^{III}(x) &= C_5 \\
EI_2 w_2^{II}(x) &= C_5\ x + C_6 \\
EI_2 w_2^{I}(x) &= \frac{C_5}{2} x^2 + C_6\ x + C_7 \\
EI_2 w_2(x) &= \frac{C_5}{6} x^3 + \frac{C_6}{2} x^2 + C_7\ x + C_8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{(1)} w_1(0) = 0 && \Rightarrow && C_4 = 0 \\
&\xrightarrow{(2)} w_1^I(0) = 0 && \Rightarrow && C_3 = 0 \\
&\xrightarrow{(8)} EI_2 w_2^{III}(3a) = 0 && \Rightarrow && C_5 = 0 \\
&\xrightarrow{(6)} EI_1 w_1^{III}(2a) = EI_2 w_2^{III}(2a) && \Leftrightarrow && \frac{q_0}{4a}(2a)^2 + C_1 = 0 \\
& && \Leftrightarrow && C_1 = -q_0\ a \\
&\xrightarrow{(4)} EI_1 w_1^{II}(2a) = 0 && \Leftrightarrow && \frac{q_0}{12a}(2a)^3 - q_0 a \cdot 2a + C_2 = 0 \\
& && \Leftrightarrow && C_2 = -\frac{2}{3} q_0 a^2 + 2 q_0 a^2 = \frac{4}{3} q_0 a^2 \\
&\xrightarrow{(5)} EI_2 w_2^{II}(2a) = 0 && \Leftrightarrow && C_6 = 0 \\
&\xrightarrow{(7)} w_2^I(3a) = 0 && \Rightarrow && C_7 = 0 \\
&\xrightarrow{(3)} w_1(2a) = w_2(2a)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_8 = q_0 \frac{EI_2}{EI_1}\left(\frac{1}{240a}(2a)^5 - \frac{a}{6}(2a)^3 + \frac{2}{3}a^2(2a)^2\right) = \frac{22}{15}\,\frac{EI_2}{EI_1} q_0\ a^4$$

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{EI_1}\left(\dfrac{q_0}{240a}x^5 - \dfrac{q_0 a}{6}x^3 + \dfrac{2q_0 a^2}{3}x^2\right) & \text{für} \qquad 0 \leq x \leq 2a \\ \dfrac{1}{EI_1}\dfrac{22}{15} q_0\ a^4 & \text{für} \qquad 2a \leq x \leq 3a \end{cases}$$

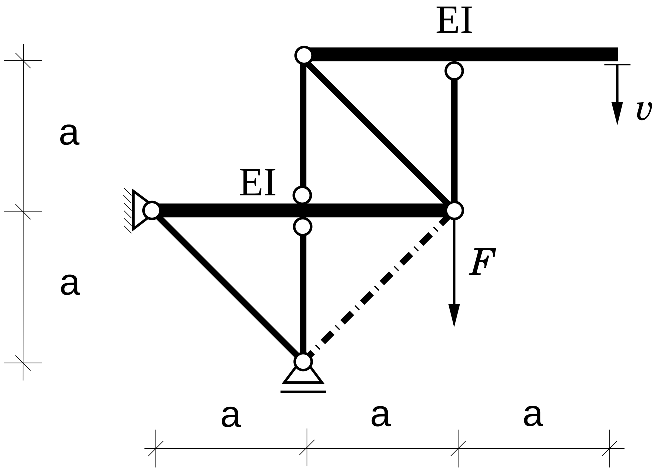
c) Verlauf der Biegelinie



d) $w(3a) = \dfrac{1}{EI_1}\dfrac{22}{15} q_0\ a^4 \stackrel{!}{=} \dfrac{2}{15a} \qquad \Leftrightarrow \qquad EI_1 = \dfrac{22}{15}\dfrac{15}{2} q_0\ a^3 = 11 q_0\ a^3$

e) Durchbiegung bleibt gleich, da $w(x)$ unabhängig von EI_2 ist.

5. Aufgabe: (ca. 21 % der Gesamtpunkte)



a) Bestimmen Sie zum dargestellten Tragwerk mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte die vertikale Verschiebung v.

b) Zur Verminderung der Verschiebung v soll ein zusätzlicher (gestrichelt dargestellter) gerader Stab eingebaut werden. Bestimmen Sie die Stabkraft in diesem zusätzlichen Stab.

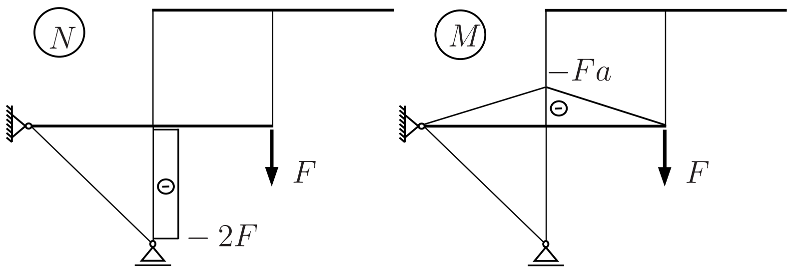
Hinweise: Alle Tragwerksteile besitzen die Dehnsteifigkeit EA.

Die Aufgabe ist mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* zu lösen. Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

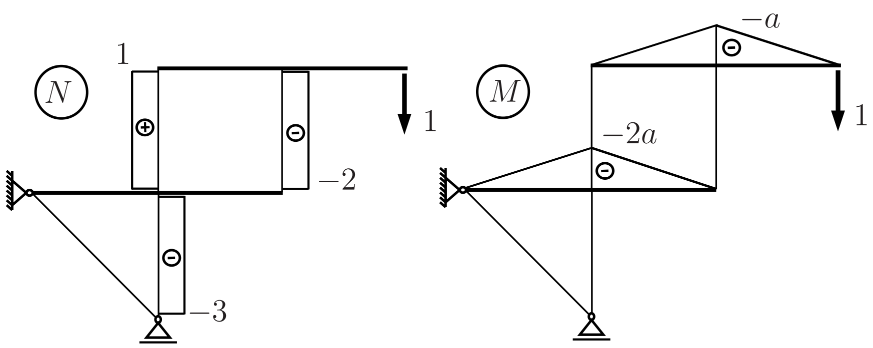
Gegeben: $a,\ F,\ EA,\ EI = \frac{1}{3} EA\, a^2$

5. Aufgabe Lösungsvorschlag:

a) 0-Lastfall:



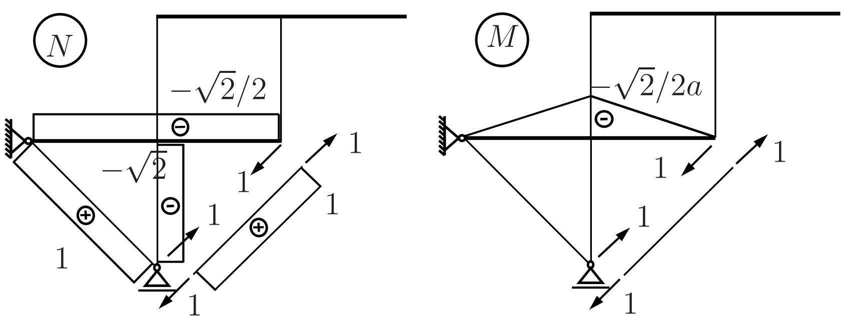
1-Lastfall:



$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{EA}(-2F)(-3)a + \frac{1}{EI}\ 2 \cdot \frac{1}{3}(-Fa)(-2a)a = \frac{6Fa}{EA} + \frac{4Fa^3}{EAa^2} = 10\ \frac{Fa}{EA}$$

b) 0-Lastfall aus a)

1-Lastfall:



$$\alpha_{10} = \frac{1}{EA}(-2F)(-\sqrt{2})a + \frac{1}{EI}2\frac{1}{3}(-Fa)(-\frac{\sqrt{2}}{2}a)a = \frac{2\sqrt{2}Fa}{EA} + \frac{\sqrt{2}Fa^3}{EAa^2} = 3\sqrt{2}\frac{Fa}{EA}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{EA}\left(2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 2\cdot 1^2 \cdot \sqrt{2}\right)a + \frac{1}{EI}2\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 a$$

$$= \frac{1}{EA}(1 + 2 + 2\sqrt{2})a + \frac{a^3}{EAa^2} = (4 + 2\sqrt{2})\frac{a}{EA}$$

$$\Rightarrow \quad S = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}F$$