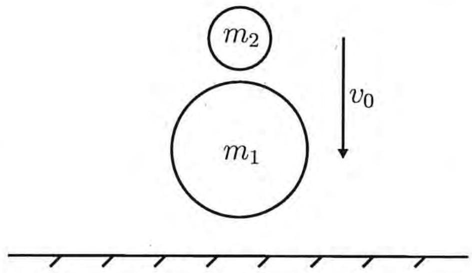
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Dynamik
7. März 2018

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Zwei Kugeln (Massenpunkte) m_1 und m_2 fallen wie skizziert in geringem Abstand unmittelbar hintereinander zu Boden, wo sie mit gleicher Geschwindigkeit v_0 ankommen. Dort kommt es zunächst zum Stoß zwischen m_1 und dem Boden und direkt im Anschluss zum Stoß zwischen den beiden Massen. Alle Stöße seien rein elastisch.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ der beiden Massen nach dem Stoß miteinander.

b) Wie groß ist dann die Geschwindigkeit $\bar{v}_2$ der Masse m_2 für den Grenzfall $m_1 \gg m_2$?

Gegeben: m_1, m_2, v_0, $e = 1$

1. Aufgabe

a)

Stoßzahl:

$$e = \frac{\bar{v}_{2x} - \bar{v}_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} = 1 \tag{1}$$

Impulssatz m_1:

$$m_1 \left(\bar{v}_{1x} - v_{1x} \right) = -\hat{F} \tag{2}$$

Impulssatz m_2:

$$m_2 \left(\bar{v}_{2x} - v_{2x} \right) = \hat{F} \tag{3}$$

Geschwindigkeiten vor Stoß: $v_{1x} = -v_0, \;\; v_{2x} = v_0$

Aus Stoßzahl (1) mit Einsetzen der Geschwindigkeiten:

$$\bar{v}_{2x} - \bar{v}_{1x} = v_{1x} - v_{2x} = -2v_0 \quad \rightsquigarrow \quad \bar{v}_{2x} = \bar{v}_1 x - 2v_0 \tag{4}$$

(3) = -(2) unter Verwendung der Geschwindigkeiten:

$$m_2 \left(\bar{v}_{2x} - v_0 \right) = -m_1 \left(\bar{v}_{1x} + v_0 \right) \tag{5}$$

Einsetzen von (4) und Auflösen nach $\bar{v}_{1x}$:

$$m_2 \left(\bar{v}_1 x - 2v_0 - v_0 \right) = -m_1 \left(\bar{v}_{1x} + v_0 \right) \quad \rightsquigarrow \quad \bar{v}_{1x} = v_0 \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) \tag{6}$$

Einsetzen von (6) in (4):

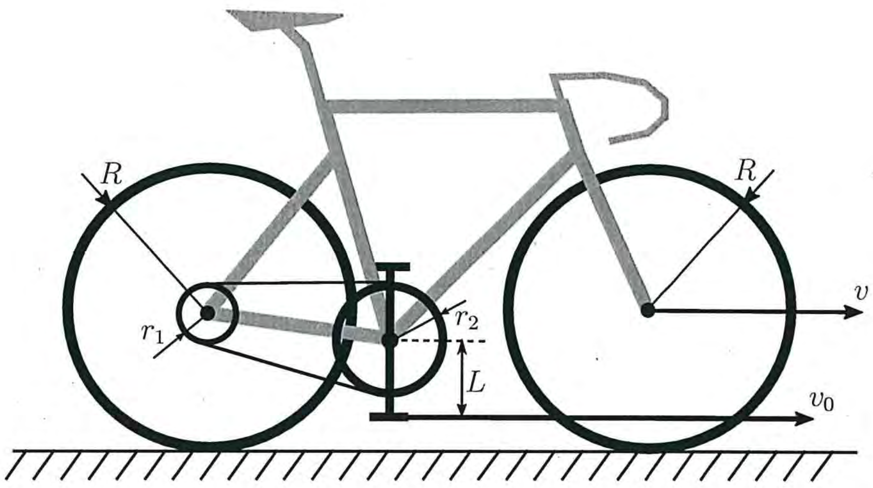
$$\bar{v}_{2x} = v_0 \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) - 2v_0 \quad \rightsquigarrow \quad \bar{v}_{2x} = -v_0 \left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \tag{7}$$

b)

$m_1 \gg m_2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{m_2}{m_1} \to 0$:

$$\bar{v}_{2x} = -v_0 \left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) = -v_0 \frac{m_1 \left(3 - \frac{m_2}{m_1} \right)}{m_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)} \approx -3v_0$$

2. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



An dem momentan nach unten ragenden Pedal eines Fahrrades sei wie skizziert eine Schnur befestigt, die mit der Geschwindigkeit v_0 nach rechts gezogen wird.
Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass die Räder auf der Unterlage rollen und das Fahrrad keinen Freilauf besitzt, die Geschwindigkeit v des Fahrrades.

Gegeben: $R,\ L < R,\ r_1,\ r_2 > r_1,\ v_0$

2. Aufgabe

Winkelgeschwindigkeit des Hinterrades ω_1, Winkelgeschwindigkeit der Tretkurbel ω_2

ω_1 aus Kinematik (Rollbedingung):

$$\omega_1 R = v \quad \rightsquigarrow \quad \omega_1 = \frac{v}{R}$$

Kinematische Kopplung von ω_1 und ω_2, Auflösen nach ω_2 und Einsetzen von ω_1:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad \rightsquigarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{r_1}{r_2}\frac{v}{R}$$

Geschwindigkeit v_0 in Abhängigkeit von ω_2 und Geschwindigkeit v, Einsetzen von ω_2:

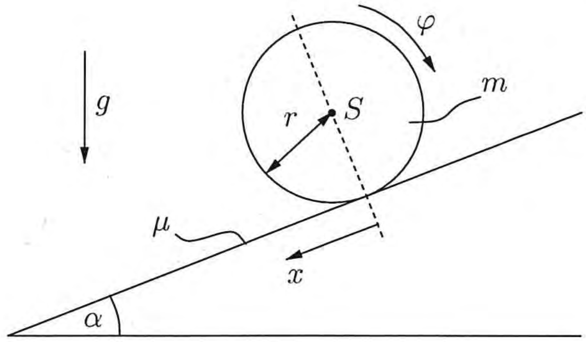
$$v_0 = v - \omega_2 L = v - v\frac{L}{R}\frac{r_1}{r_2} = v\left(1 - \frac{L}{R}\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Auflösen nach der gesuchten Geschwindigkeit v:

$$\rightsquigarrow v = v_0 \frac{R r_2}{R r_2 - L r_1}$$

Institut für Mechanik — Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch — Dynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig — 7. März 2018

3. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Eine anfangs mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 > 0$ rotierende homogene Walze wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\dot{x}(t=0) = 0$ auf einer rauhen schiefen Ebene (Reibungskoeffizient μ, Neigungswinkel α) abgesetzt.

a) Das System hat *zwei* Freiheitsgrade (Kreuzen Sie die *eine* richtige Antwort an!),

- [ ] weil es sich um ein ebenes Problem handelt,
- [ ] weil die Koordinaten x und φ die Rollbedingung erfüllen,
- [x] weil die Koordinaten x und φ keiner kinematischen Bindung unterliegen.

b) Fertigen sie ein Freikörperbild der Walze an und stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems in den Koordinaten x und φ auf.

c) Bis zu welchem Zeitpunkt sind diese Bewegungsgleichungen gültig?

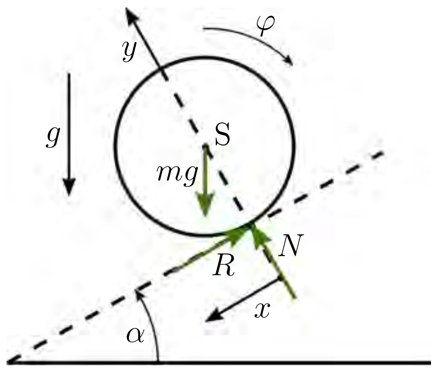
Gegeben: r, m, α, μ, ω_0, g

3. Aufgabe

a) Das System hat *zwei* Freiheitsgrade, weil die Koordinaten x und φ keiner kinematischen Bindung unterliegen.

b)

Freikörperbild:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_{ix} = m\ddot{x}_S : \qquad -R + mg\sin\alpha = m\ddot{x}_S$$

$$\sum F_{iy} = 0 : \qquad N - mg\cos\alpha = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad N = mg\cos\alpha$$

$$\sum M_{iz}^S = \Theta_S\varphi : \qquad -Rr = \Theta_S\ddot{\varphi} \qquad \text{mit} \qquad \Theta_S = \frac{mr^2}{2}$$

Coulomb'sche Reibung, Einsetzen der Normalkraft:

$$R = \mu N \qquad \rightsquigarrow R = \mu mg\cos\alpha$$

Einsetzen in Gleichgewicht in $x-$ bzw. $\varphi-$Richtung liefert Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{x}_S = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{r}\mu\cos\alpha$$

c) Die Bewegungsgleichungen sind gültig, solange die Walze *nicht* rollt, also keine kinematische Bindung zwischen x und φ besteht:

$$\dot{\varphi}r + \dot{x} > 0 \tag{1}$$

Anfangsbedingungen, Einsetzen in zeitintegrierte Bewegungsgleichungen:

$$\dot{x}(t=0) = 0 \qquad \rightsquigarrow \dot{x}(t) = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,t \tag{2}$$

$$\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 \qquad \rightsquigarrow \dot{\varphi}(t) = -\frac{2g}{r}\mu t\cos\alpha + \omega_0 \tag{3}$$

Einsetzen von (2) und (3) in (1):

$$-2g\mu\cos\alpha t + \omega_0 r + gt\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) > 0$$

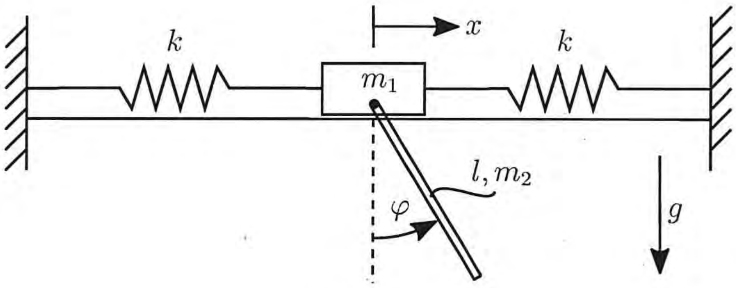
Auflösen nach Zeitpunkt t:

$$t < \frac{\omega_0 r}{3g\mu cos\alpha - g\sin\alpha}$$

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Dynamik
7. März 2018

4. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



An einer Masse m_1, die zwischen zwei Federn (Federsteifigkeit k) horizontal reibungsfrei gleiten kann, ist ein reibungsfrei gelagerter homogener Stab der Länge l und der Masse m_2 befestigt.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems in den Koordinaten x und φ mit der Methode nach LAGRANGE auf.

b) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen für $|\varphi| \ll 1$ und bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems. Nehmen Sie dazu die speziellen Werte $m_1 = m, \; m_2 = 2m, \; k = 3mg/l$ an.

c) Wie ändern sich die Eigenkreisfrequenzen des Systems (Kreuzen Sie an!), wenn

i) eine der Federn entfernt wird?

■ werden kleiner
□ werden größer
□ bleiben gleich

ii) die Feder links entfernt und rechts parallel zur verbliebenen Feder angebracht wird?

□ werden kleiner
□ werden größer
■ bleiben gleich

Gegeben: $g, \; l, \; m_1, \; m_2, \; k$

Hinweis: Andere Lösungswege als die Methode nach LAGRANGE werden nicht bewertet.

4. Aufgabe

a)

Freiheitsgrade: $q_1 = x \qquad q_2 = \varphi$

Ortsvektoren:

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \dot{\vec{r}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \|\dot{\vec{r}}_1\|^2 = \dot{x}^2$$

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} x + \frac{l}{2}\sin\varphi \\ \frac{l}{2}\cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \dot{\vec{r}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \end{bmatrix} \qquad \rightsquigarrow \|\dot{\vec{r}}_2\|^2 = \dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

Energien:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{m_2}{2}\frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

$$V = V_{Federn} + V_{Lage} = kx^2 - m_2 g\frac{l}{2}\cos\varphi$$

Lagrange'sche Gleichungen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k^* \quad , \quad k = \{1, 2\}, \quad Q_k^* = 0$

$k = 1: \; q_1 = x$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{m_2 l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{m_2 l}{2}l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2kx = 0 \tag{1}$$

$k = 2: \; q_2 = \varphi$

$$\frac{m_2 l}{2}\cos\varphi\ddot{x} + \frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{m_2 l}{2}\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \frac{m_2 l}{2}\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi + \frac{m_2 g l}{2}\sin\varphi = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{m_2 l}{2}\ddot{x}\cos\varphi + \frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{m_2 g l}{2}\sin\varphi = 0 \tag{2}$$

b) Linearisierung: $|\varphi| \ll 1 \;\rightsquigarrow\; \sin\varphi \approx \varphi, \;\cos\varphi \approx 1, \;\dot{\varphi} \approx 0$

$$(1): \quad (m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{m_2 l}{2}\ddot{\varphi} + 2kx = 0$$

$$(2): \quad \frac{m_2 l}{2}\ddot{x} + \frac{m_2 l^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{m_2 g l}{2}\varphi = 0$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & \frac{m_2 l}{2} \\ \frac{m_2 l}{2} & \frac{m_2 l^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g l}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Werte einsetzen: $\quad m_1 = m,\ m_2 = 2m,\ k = 3m\frac{g}{l}$

$$\begin{bmatrix} 3m & ml \\ ml & \frac{2}{3}ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6\frac{mg}{l} & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte bestimmen: $\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \stackrel{!}{=} 0$

$$\det \begin{bmatrix} -\omega^2 3m + 6\frac{mg}{l} & -\omega^2 ml \\ -\omega^2 ml & -\omega^2 \frac{2}{3} ml^2 + glm \end{bmatrix} = \omega^4 - 7\frac{g}{l}\omega^2 + 3\left(\frac{g}{l}\right)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow \left(\omega^2 - \frac{7g}{2l}\right)^2 = \left(\frac{5g}{4l}\right)^2 \quad \rightsquigarrow \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_2^2 = 6\frac{g}{l}$$

c) i) werden kleiner

ii) bleiben gleich