Modulprüfung

Dynamik

06. März 2019

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 10% der Gesamtpunktzahl)

Bitte beantworten Sie folgende Fragen:

1. Wie lautet die Formel für eine harmonische Schwingung? Benennen Sie die Kenngrößen die eingehen.

2. Wodurch ist eine periodische Schwingung gekennzeichnet?

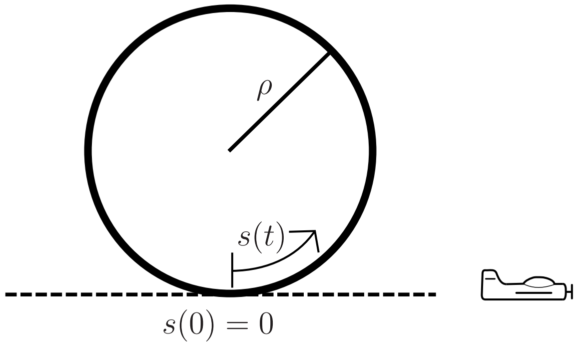
3. Betrachtet werde ein diskretes mechanisches System. Was versteht man unter der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems?

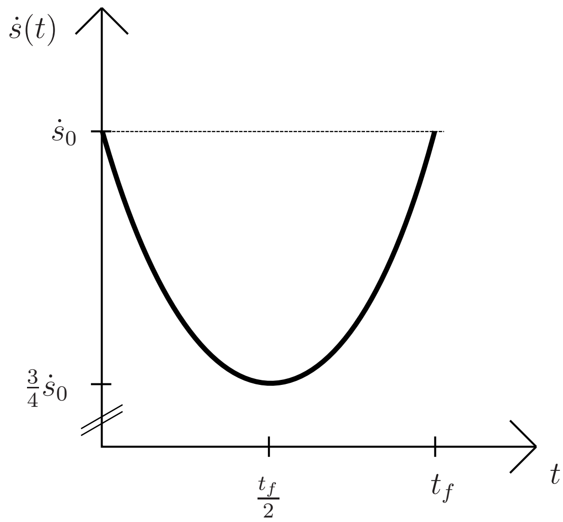
4. Welche Klasse von Kräften tritt nicht im Prinzip der virtuellen Arbeit auf? Warum ist dies so?

5. Der Drallsatz für einen starren Körper lautet im Fall ebener Bewegungen $M_A = \dot{L}_A$. Um welche Größen handelt es sich bei M_A und L_A? Gilt der Drallsatz für beliebige Bezugspunkte oder gibt es hier Einschränkungen? Falls ja, welche?

6. Nennen Sie zwei zentrale Annahmen, die der elementaren Theorie des Stoßes zugrunde liegen.

2. Aufgabe: (ca. 15% der Gesamtpunkte)





Ein Kunstflugpilot fliegt während einer Flugshow einen kreisrunden Looping (siehe linke Abbildung). Der parabelförmige Geschwindigkeitsverlauf ist dem Diagramm der rechten Abbildung zu entnehmen. Es soll der Zeitraum $t \in [0, t_f]$ betrachtet werden, in dem der Looping durchflogen wird.

a) Ermitteln Sie die Funktion $\dot{s}(t)$ für den Geschwindigkeitsverlauf aus obigem Diagramm (Herleitung!).

Rechnen Sie im Folgenden mit dem Geschwindigkeitsverlauf

$$\dot{s}(t) = \dot{s}_0 \left(\frac{t^2}{t_f^2} - \frac{t}{t_f} + 1 \right) = v(t)$$

weiter.

b) Ermitteln Sie den Beschleunigungsverlauf in natürlichen Koordinaten.
Hierbei muss v^2 nicht ausmultipliziert werden.

c) Zu welchem Zeitpunkt wirkt die minimale Normalbeschleunigung?

d) Welche Strecke hat der Pilot bis zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt?

e) Gehen Sie im Folgenden von einer Anfangsgeschwindigkeit von $\dot{s}_0 = 60\frac{m}{s}$ und einer Zeitspanne von $t_f = 10s$ für das Manöver aus. Das Gewicht des Pilots betrage $80kg$.
Mit welcher Normalkraft F_N wird der Pilot in Abhängigkeit des Krümmungsradius ρ minimal in den Sitz gedrückt. Die Schwerkraft kann hierbei als vernachlässigbar angenommen werden.

Gegeben: $\dot{s}_0,\ t_f,\ \rho = \text{konst.},\ m_{\text{Pilot}} = 80kg$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Geschwindigkeitsverlauf

Grundform

$$\dot{s}(t) = c \cdot \left(t - \frac{t_f}{2}\right)^2 + d$$

Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot{s}(t = \frac{t_f}{2}) &= \frac{3}{4}\dot{s}_0 = d && \Rightarrow d = \frac{3}{4}\dot{s}_0 \\ \dot{s}(t = 0) &= \dot{s}_0 = c\frac{t_f}{4} + \frac{3}{4}\dot{s}_0 && \Rightarrow c = \frac{\dot{s}_0}{t_f} \end{aligned}$$

Ergebnis

$$\dot{s}(t) = \frac{\dot{s}_0}{t_f} \cdot \left(t - \frac{t_f}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\dot{s}_0 = \dot{s}_0\left(\frac{t^2}{t_f^2} - \frac{t}{t_f} + 1\right)$$

b) Beschleunigungsvektor

Grundform

$$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$

Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\mathrm{d}\dot{s}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}_0\left(2\frac{t}{t_f^2} - \frac{1}{t_f}\right) \\ a_n &= \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{\dot{s}_0^2}{\rho}\left(\frac{t^2}{t_f^2} - \frac{t}{t_f} + 1\right)^2 \end{aligned}$$

Ergebnis

$$\vec{a} = \dot{s}_0\left(2\frac{t}{t_f^2} - \frac{1}{t_f}\right)\vec{e}_t + \frac{\dot{s}_0^2}{\rho}\left(\frac{t^2}{t_f^2} - \frac{t}{t_f} + 1\right)^2\vec{e}_n$$

c) Maximale Normalbeschleunigung

Extremalitätsanforderung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_n = \frac{\dot{s}_0^2}{\rho} \cdot 2\left(\frac{t^2}{t_f^2} - \frac{t}{t_f} + 1\right)\left(2\frac{t}{t_f^2} - \frac{1}{t_f}\right) = 0$$

Nullstellen

$$\left(2\frac{t}{t_f^2} - \frac{1}{t_f}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{1}{2}t_f$$

$$\left(\frac{t^2}{t_f^2} - \frac{t}{t_f} + 1\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{2,3} = \frac{t_f \pm \sqrt{t_f^2 - 4t_f^2}}{2} \qquad \lightning$$

Ergebnis

$$t_{a_{n,max}} = \frac{1}{2}t_f$$

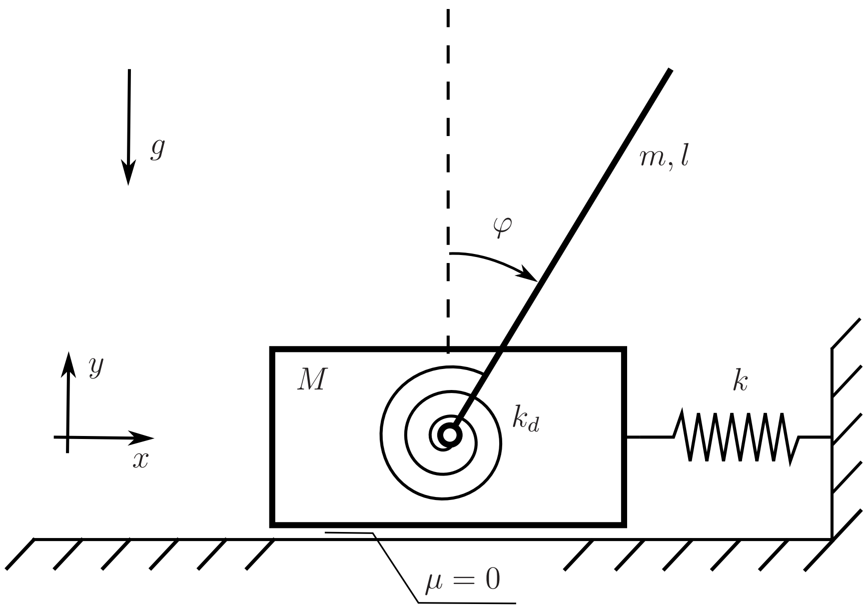
d) Zurückgelegte Strecke bei $t_{a_{n,max}}$

$$s(t_{a_{n,max}}) = \int_0^{\frac{1}{2}t_f} \dot{s}_0 \left(\frac{t^2}{t_f^2} - \frac{t}{t_f} + 1\right) \mathrm{d}t = \dot{s}_0 \left[\frac{t^3}{3t_f^2} - \frac{t^2}{2t_f} + t\right]_0^{\frac{1}{2}t_f}$$
$$= \frac{5}{12}\dot{s}_0 t_f$$

e) Maximale NormalKraft

$$F_{N,max} = m \cdot \vec{a}_{n,max} = m \cdot \vec{a}_n(t = 5s)$$
$$= 80kg \cdot \frac{1}{\rho}\left(60\frac{m}{s}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)^2$$
$$= 162kN\frac{m}{\rho}$$

3. Aufgabe: (ca. 30% der Gesamtpunkte)



Eine auf einer glatten Oberfläche reibungsfrei gleitende Masse M wird horizontal durch eine Feder (Federsteifigkeit k) gehalten. Im Schwerpunkt ist die Masse M durch eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit k_d) mit einem starren Stab (homogen verteilte Masse m) verbunden. Bei vertikaler Lage des Stabes ist die Drehfeder entspannt.
Bearbeiten Sie zu oben dargestelltem mechanischen System folgende Teilaufgaben:

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Freiheitsgrade.

b) Stellen Sie unter Verwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichung(en) auf.

c) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung(en) unter Annahme kleiner Auslenkungen und Geschwindigkeiten.

d) Berechnen Sie die Eigenfrequenz(en) und die zugehörigen Eigenform(en) des linearisierten Systems für $M = 2m$ und $k_d = \frac{1}{9}kl^2$.
Der Einfluss der Gravitation soll hierfür (in Teil d)) vernachlässigt werden.

Gegeben: $M,\ m,\ l,\ \mu = 0,\ k_d,\ k,\ g,$

<u>Hinweis</u>: Die Aufgabe ist mit der Methode nach Lagrange zu lösen. Andere Lösungswege als diese werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Anzahl Freiheitsgrade: 2 $\Rightarrow$ generalisierte Koordinaten: $q_1 = x$; $\quad q_2 = \varphi$

b) Bewegungsgleichungen: Ortsvektoren:

$$r_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \dot{r}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} x + \sin(\varphi)\frac{l}{2} \\ \cos(\varphi)\frac{l}{2} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \dot{r}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + \cos(\varphi)\dot{\varphi}\frac{l}{2} \\ -\sin(\varphi)\dot{\varphi}\frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

Kinetische Energie:

- Translation:

$$T_{trans} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\varphi}l\cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2\frac{l^2}{4})$$

- Rotation:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\Theta^{(S)}_{Stab}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2$$

- Gesamte kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{ml}{2}\cos(\varphi)\dot{\varphi}\dot{x}$$

Potentielle Energie:

$$V = mg\cos(\varphi)\frac{l}{2} + \frac{1}{2}k_d\varphi^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Lagrangesche Gleichungen 2.Art:

- $k = 1$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + \frac{ml}{2}\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + \frac{ml}{2}\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - \frac{ml}{2}\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx$$

Bewegungsgleichung 1:

$$(M+m)\ddot{x} + \frac{ml}{2}\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - \frac{ml}{2}\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + kx = 0$$

- $k = 2$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi} + \frac{ml}{2}\cos(\varphi)\dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{ml}{2}\cos(\varphi)\ddot{x} - \frac{ml}{2}\sin(\varphi)\dot{\varphi}\dot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{ml}{2}\sin(\varphi)\dot{\varphi}\dot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{ml}{2}g\sin(\varphi) + k_d\varphi$$

Bewegungsgleichung 2:

$$\frac{ml}{2}\cos(\varphi)\ddot{x} + \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{ml}{2}g\sin(\varphi) + k_d\varphi = 0$$

c) Linearisierte Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} M+m & \frac{ml}{2} \\ \frac{ml}{2} & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{ml}{2}g + k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Eigenfrequenzen und zugehörige Eigenformen: Eigenwertproblem:

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0$$

Nicht triviale Lösung:

$$det \begin{bmatrix} k - 3m\omega^2 & -\frac{ml}{2}\omega^2 \\ -\frac{ml}{2}\omega^2 & \frac{1}{9}kl^2 - \frac{ml^2}{3}\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

Quadratische Gleichung für ω^2:

$$(k - 3m\omega^2)(\frac{1}{9}kl^2 - \frac{ml^2}{3}\omega^2) - \left(\frac{ml}{2}\right)^2 \omega^4 = 0$$

Eigenfrequenzen:

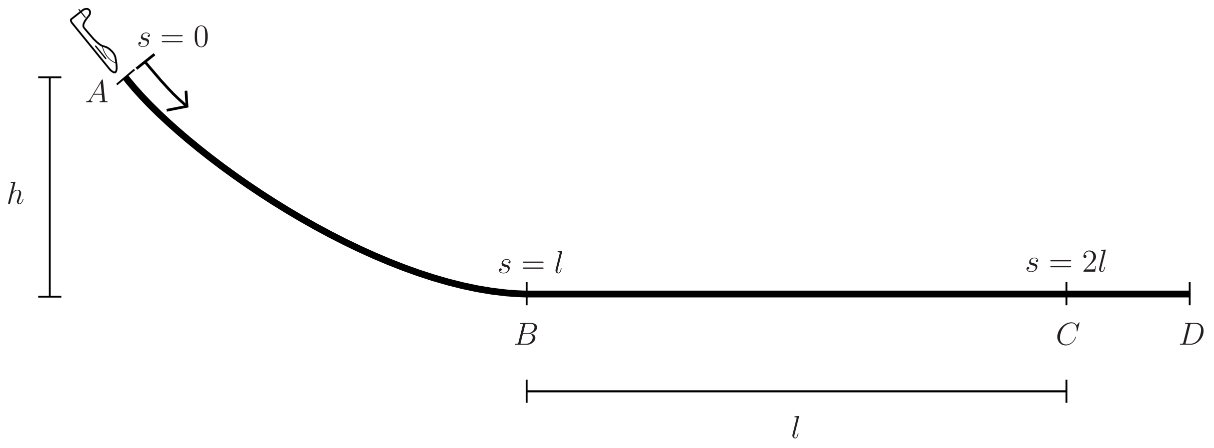
$$\omega_1^2 = \frac{2}{9}\frac{k}{m}$$
$$\omega_2^2 = \frac{2}{3}\frac{k}{m}$$

Eigenformen:

$$\mu_1 = 3\frac{1}{l}$$
$$\mu_2 = -3\frac{1}{l}$$

4. Aufgabe: (ca. 20% der Gesamtpunkte)

Ein als Massepunkt der Masse m idealisiertes Segelflugzeug befindet sich während der Landung auf dem unten skizzierten Weg s. Die Anfluggeschwindigkeit beträgt $v(s=0) = 50\frac{m}{s}$



a) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_B des Flugzeugs beim Aufsetzen auf die Landebahn. Für den Luftwiderstand F_w in Bereich $A - B$ kann vereinfacht

$$F_w = c \cdot (6\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s}{l} + 1), \qquad 0 \leq s \leq l$$

angenommen werden.

b) In Punkt B beginnt der Pilot sofort zu bremsen. Die konstante Bremskraft des Flugzeugs beträgt $F_B = 2kN$. Für den Luftwiderstand in Bereich $B - C$ gelte

$$F_w = c \cdot (-\frac{9}{4}\frac{s^2}{l^2} + 4\frac{s}{l} + \frac{1}{4}), \qquad l \leq s \leq 2l$$

Ermitteln Sie, ob das Flugzeug auf der Landebahn in Bereich $B - C$ zum Stillstand kommt.

c) Für den Fall, dass die Landebahn in Bereich $B - C$ zu kurz ist, wurde in Punkt C ein Auffangseil montiert. Die Kraftwirkung des Auffangseils kann mithilfe einer linearen Feder (Federsteifigkeit k) modelliert werden. Ermitteln Sie die maximale Seilkraft F_S (bzw. Federkraft), wenn die konstante Bremskraft des Flugzeugs weiterhin $F_B = 2kN$ beträgt. Der Luftwiderstand in Bereich $C - D$ kann als vernachlässigbar angenommen werden.

Gegeben: $h = 200m,\ l = 500m,\ c = 20N,\ k = 120\frac{N}{m},\ m = 400kg,\ g = 10\frac{m}{s},\ F_B = 2kN$

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Geschwindigkeit v_B

Energien

Punkt A: $T_A = \frac{1}{2} m\, v_A^2 = 500kNm$
$V_A = mgh = 800kNm$

Punkt B: $T_B = \frac{1}{2} m\, v_B^2$
$V_B = 0$

Nichtpotentialkräfte

$$W_{F_w}|_0^l = -\int_0^l c \cdot \left(6\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s}{l} + 1\right)\, \mathrm{d}s = -c \cdot \left[2\frac{s^3}{l^2} - \frac{s^2}{l} + s\right]_0^l = -2cl$$

Energiebilanz

$$\frac{1}{2} m\, v_A^2 + mgh - 2cl = \frac{1}{2} m\, v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} m\, v_A^2 + mgh - 2cl\right)} = 80\frac{m}{s}$$

b) Geschwindigkeit v_C

Energien

Punkt B: $T_B = \frac{1}{2} m\, v_B^2 = 1280kNm$
$V_B = 0$

Punkt C: $T_C = \frac{1}{2} m\, v_C^2$
$V_C = 0$

Nichtpotentialkräfte

$$W_{F_w}|_l^{2l} = -\int_l^{2l} c \cdot \left(-\frac{9}{4}\frac{s^2}{l^2} + 4\frac{s}{l} + \frac{1}{4}\right)\, \mathrm{d}s = -c \cdot \left[-\frac{3}{4}\frac{s^3}{l^2} + 2\frac{s^2}{l} + \frac{1}{4}s\right]_l^{2l} = -cl$$

$$W_{F_B}|_l^{2l} = -\int_l^{2l} F_B\, \mathrm{d}s = -F_B l = -1000kNm$$

Energiebilanz

$$\frac{1}{2} m\, v_B^2 - cl - F_B l = \frac{1}{2} m\, v_C^2$$

$$v_C = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} m\, v_B^2 - cl - F_B l\right)} = 36,74\frac{m}{s}$$

c) Maximale Seilkraft F_S

Energien

Punkt C:

$$T_C = \frac{1}{2} m\, v_C^2 = 270kNm$$
$$V_C = 0$$

Punkt D:

$$T_D = 0$$
$$V_D = \frac{1}{2} k x^2$$

Nichtpotentialkräfte

$$W_{F_B}|_0^x = -\int_0^x F_B \,\mathrm{d}s = -F_B x = -2kNx$$

Energiebilanz

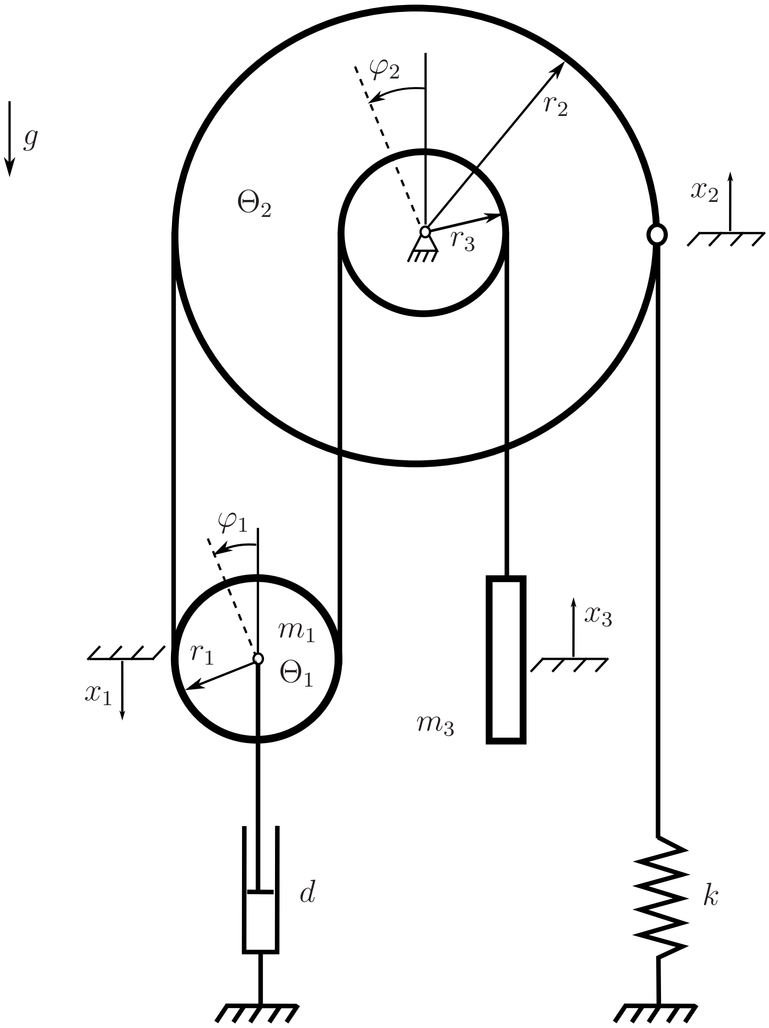
$$\frac{1}{2} m\, v_c^2 - F_B x = \frac{1}{2} k\, x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{F_B}{k} x - \frac{m}{k}\, v_c^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\frac{F_B}{k} \pm \sqrt{\left(2\frac{F_B}{k}\right)^2 + 4\frac{m}{k} v_C^2}}{2} = \begin{cases} x_1 = 52,45m \\ x_2 = -85,78m \end{cases}$$

Maximale Seilkraft F_S

$$F_{S_{max}} = k\, x_1 = 120\frac{N}{m} \cdot 52,45m = 6,29kN$$

5. Aufgabe: (ca. 25% der Gesamtpunkte)



Bearbeiten Sie zu oben dargestelltem schwingungsfähigen System folgende Teilaufgaben:

a) Geben Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3, φ_1 in Abhängigkeit von φ_2 an.

Gehen Sie im Weiteren einfachheitshalber davon aus, dass $\varphi_1 = \varphi_2$ gilt.

b) Schneiden Sie das System frei.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der Koordinate φ_2 für $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$ auf.

d) Berechnen Sie die Verdrehung φ_2 in der statischen Ruhelage.

Gegeben: $m_1 = m_3 = m,\ \Theta_2 = 2\Theta_1 = 4\Theta,\ k,\ d,\ g,\ 3r_1 = 3r_3 = r_2 = 3r$

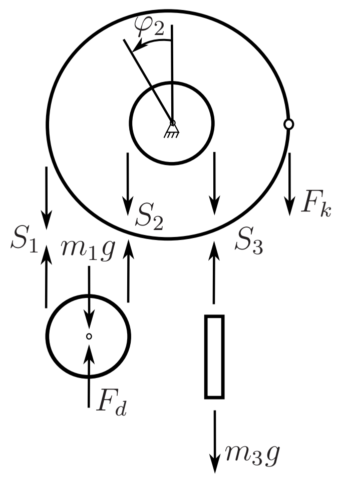
Hinweis: Für $\varphi_2 = 0$ ist die Feder entspannt. Zu jedem Zeitpunkt liegt zwischen dem Seil und den Rollen Haften vor (kein Schlupf). Lösen Sie die Aufgaben mithilfe von Drall- und Schwerpunktsätzen. Andere Lösungsmethoden werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 5

a) Kinematische Beziehungen:

$$x_2 = \varphi_2 r_2 = \varphi_2 3r$$
$$x_3 = \varphi_2 r_3 = \varphi_2 r$$
$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = \varphi_2 2r$$
$$\varphi_1 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\frac{1}{2r_1} = \frac{3r - r}{2r}\varphi_2 = \varphi_2$$

b) Freischnitt:



c) Bewegungsgleichung Drall- und Schwerpunktsätze:

$$\sum_i F_i = m_3 \ddot{x}_3 = mr\ddot{\varphi}_2 : \qquad S_3 - mg = mr\ddot{\varphi}_2 \tag{1}$$
$$\sum_i F_i = m_1 \ddot{x}_1 = 2mr\ddot{\varphi}_2 : \qquad -S_1 - S_2 - F_d + mg = 2mr\ddot{\varphi}_2 \tag{2}$$
$$\sum_i M_i = \Theta_1 \ddot{\varphi}_1 = 2\Theta\ddot{\varphi}_2 : \qquad -S_1 r + S_2 r = 2\Theta\ddot{\varphi}_2 \tag{3}$$
$$\sum_i M_i = \Theta_2 \ddot{\varphi}_2 = 4\Theta\ddot{\varphi}_2 : \qquad S_1 3r + S_2 r - S_3 r - F_k 3r = 4\Theta\ddot{\varphi}_2 \tag{4}$$

aus (1) folgt:

$$S_3 = mr\ddot{\varphi}_2 + mg \tag{5}$$

(3)$\frac{1}{r}$+ (2) liefert:

$$S_1 = \frac{mg}{2} - \frac{F_d}{2} - 3\Theta\frac{1}{r}\ddot{\varphi}_2 \tag{6}$$

(6) einsetzen in (3):

$$S_2 = \frac{mg}{2} - \frac{F_d}{2} - \Theta\frac{1}{r}\ddot{\varphi}_2 \tag{7}$$

(5), (6) und (7) einsetzen in (4):

$$16\Theta\ddot{\varphi}_2 + 2rF_d + 3rF_k - mgr = 0 \qquad mit \quad F_d = d\dot{x}_1 = d2r\dot{\varphi}_2$$
$$F_k = kx_2 = k3r\varphi_2$$

d) Statische Ruhelage ($\ddot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_2$):

$$\varphi_2 = \frac{1}{9}\frac{mg}{kr}$$

Modulprüfung
Dynamik
am 06. März 2019

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....