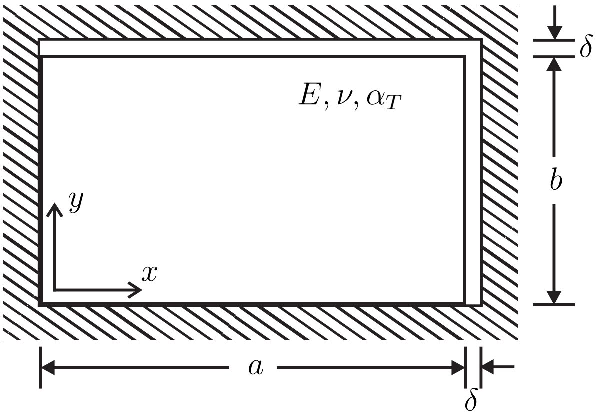
Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Festigkeitslehre
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	3. März 2020

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

Eine Rechteckscheibe ($a > b$) wird in einen etwas größeren starren Ausschnitt eingesetzt, sodass Spalten der Breite δ vorhanden sind. Anschließend wird die Scheibe erwärmt. Es sei angenommen, dass die Scheibe an allen Rändern reibungsfrei gleiten kann und ein ebener Spannungszustand vorliegt.



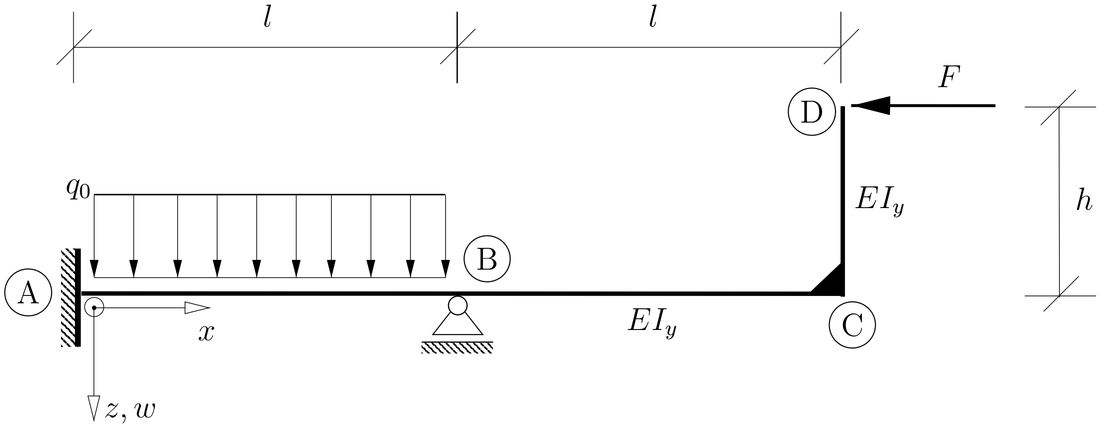
a) Welche Temperaturerhöhung ΔT_a ist erforderlich, damit der rechte Spalt gerade geschlossen wird?

b) Bei welcher Temperaturerhöhung ΔT_b schließt sich auch der obere Spalt? Wie groß ist dann σ_x?

c) Welche Spannungen herrschen in der Scheibe für $\Delta T > \Delta T_b$?

Gegeben: $a,\ b,\ \delta,\ E,\ \nu,\ \alpha_T$

2. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das oben dargestellte System unter der angegebenen Belastung.

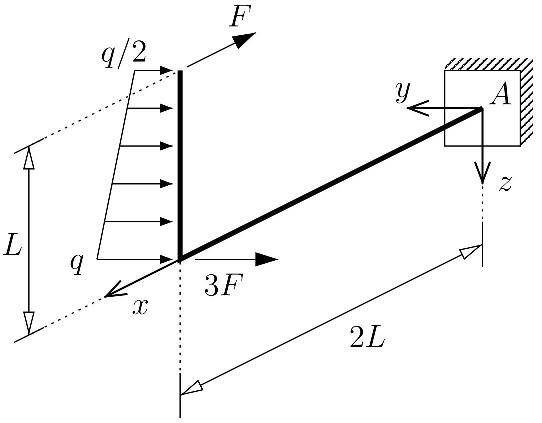
a) Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ des Trägers für den Bereich A – B – C mit Hilfe der Balkendifferentialgleichung.

b) Skizzieren Sie qualitativ die Momenten- und die Biegelinie für den gesamten Träger (A – B – C – D) in die dafür vorgesehenen Vorlagen.

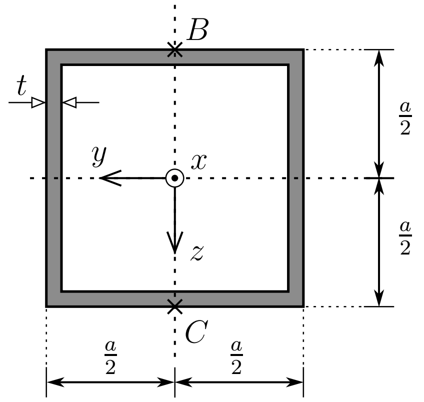
Gegeben: q_0, $F = q_0 l$, l, $h = l/2$, EI_y

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)

System



Querschnitt bei A



Der dargestellte Kragarm ist in A eingespannt und wird durch eine Streckenlast q und eine Einzellast $3F$ in negativer y-Richtung sowie eine Einzellast F in negativer x-Richtung belastet.

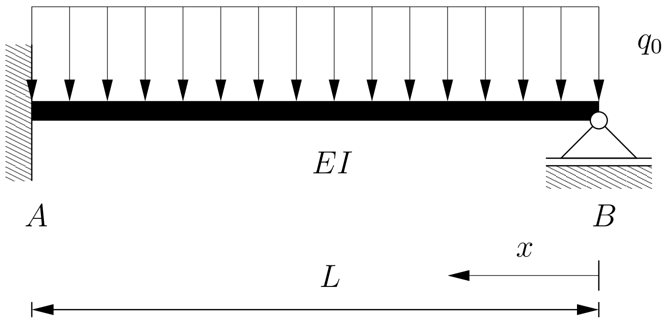
a) Bestimmen Sie die Schnittgrößen an der Einspannstelle A.

b) Bestimmen Sie die Schubspannungen an der Einspannstelle in den Punkten B und C.

<u>Hinweis:</u> Der Querschnitt darf als dünnwandig betrachtet werden ($t \ll a$).

Gegeben: $L = 2.7\,\mathrm{m},\ a = 100\,\mathrm{mm},\ t = 5\,\mathrm{mm},\ q = 100\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}},\ F = 400\,\mathrm{N}.$

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Träger (EI = konst.) wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Bestimmen Sie unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte (PdvK)

a) die Auflagerkraft B,

b) den Funktionsverlauf des Biegemoments und das Einspannmoment in A,

c) sowie die Durchbiegung in der Mitte des Trägers.

Gegeben: L, EI, q_0.

1. Aufgabe Lösung:

Elastizitätsgesetz: (Ebener Spannungszustand!)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) + \alpha_T \Delta\, T \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) + \alpha_T \Delta\, T$$

a) Der rechte Spalt wird gerade geschlossen, wenn gilt

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{a}\ .$$

Da sich die Scheibe reibungsfrei ausdehnt, gilt $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Mit dem Elastizitätsgesetz folgt

$$\varepsilon_x = \alpha_T\ \Delta T_a \overset{!}{=} \frac{\delta}{a}$$

$$\Rightarrow\ \Delta\, T_a = \underline{\underline{\frac{\delta}{\alpha_T\ a}}}\ .$$

b) Der obere Spalt schließt sich bei einer Dehnung von $\varepsilon_y = \frac{\delta}{b}$. Des Weiteren gilt $\sigma_y = 0$ und $\varepsilon_x\ =\ \frac{\delta}{a}$. Mit dem Elastizitätsgesetz folgt

$$\text{I.}\quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_x\right) + \alpha_T\ \Delta T_b \overset{!}{=} \frac{\delta}{b}$$

$$\text{II.}\quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x + \alpha_T\ \Delta T_b \overset{!}{=} \frac{\delta}{a}$$

$$\overset{\text{I.}}{\Rightarrow}\quad \sigma_x = \left(\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T_b\right) E$$

$$\overset{\text{II.}}{\Rightarrow}\quad -\,\nu\left(\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T_b\right) + \alpha_T \Delta T_b = \frac{\delta}{b}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\Delta T_b = \frac{\delta}{\alpha_T}\frac{(a+\nu b)}{ab\,(1+\nu)}}}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sigma_x = \frac{\delta\,(b-a)}{ab\,(1+\nu)}E}}$$

c) Beide Spalte sind geschlossen, sodass gilt $\varepsilon_x\ = \frac{\delta}{a}\ ,\ \varepsilon_y\ = \frac{\delta}{b}$.

$$\sigma_x = E\left[\varepsilon_x - \alpha_T \Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_y\right] \ \Rightarrow \sigma_x = E\left[\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_y\right]$$

$$\sigma_y = E\left[\varepsilon_y - \alpha_T \Delta T + \frac{\nu}{E}\sigma_x\right] \ \Rightarrow \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left[\frac{\delta}{b} + \nu\frac{\delta}{a} - \alpha_T \Delta T\,(1+\nu)\right]$$

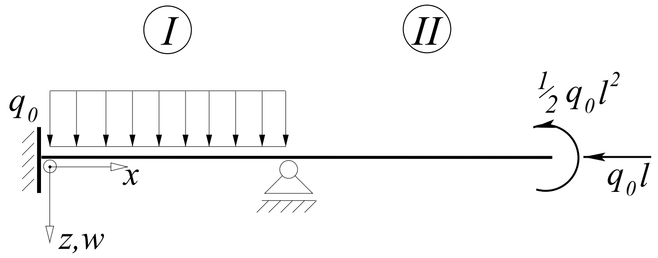
$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sigma_y = E\left[\delta\left(\frac{a+\nu b}{ab\,(1-\nu^2)}\right) - \frac{\alpha_T \Delta T}{(1-\nu)}\right]}}$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{\sigma_x = E\left[\delta\left(\frac{b+\nu a}{ab\,(1-\nu^2)}\right) - \frac{\alpha_T \Delta T}{(1-\nu)}\right]}}$$

2. Aufgabe Lösung:

a) Biegelinie $w(x)$ für den Bereich A−B−C:

statisch unbestimmtes System



Bereich I

$$\begin{aligned}
EIw_I^{(4)} &= q_0 \\
EIw_I''' &= q_0 x + C_1 \\
EIw_I'' &= \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \\
EIw_I' &= \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw_I &= \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}$$

Bereich II

$$\begin{aligned}
EIw_{II}^{(4)} &= 0 \\
EIw_{II}''' &= C_5 \\
EIw_{II}'' &= C_5 x + C_6 \\
EIw_{II}' &= \frac{1}{2} C_5 x^2 + C_6 x + C_7 \\
EIw_{II} &= \frac{1}{6} C_5 x^3 + \frac{1}{2} C_6 x^2 + C_7 x + C_8
\end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
w_I(x=0) &= 0 && \Rightarrow \underline{C_4 = 0} \\
w_I'(x=0) &= 0 && \Rightarrow \underline{C_3 = 0} \\
EIw_{II}'''(x=2l) &= -Q_z^{II}(x=2l) = 0 && \Rightarrow \underline{C_5 = 0} \\
EIw_{II}''(x=2l) &= -M_y^{II}(x=2l) = -\frac{1}{2} q_0 l^2 && \Rightarrow \underline{C_6 = -\frac{1}{2} q_0 l^2}
\end{aligned}$$

Übergangsbedingungen:

$$w_I(x=l)=0 \tag{1}$$
$$-M_y^I(x=l)=-M_y^{II}(x=l)=EIw_I''(x=l)=EIw_{II}''(x=l) \tag{2}$$
$$w_I'(x=l)=w_{II}'(x=l) \tag{3}$$
$$w_I(x=l)=w_{II}(x=l) \tag{4}$$

mit (1): $$\frac{1}{24}q_0l^4+\frac{1}{6}C_1l^3+\frac{1}{2}C_2l^2=0$$
$$\Rightarrow C_2=-\frac{1}{3}C_1l-\frac{1}{12}q_0l^2$$
$$\Rightarrow EIw_I''(x=l)=\frac{1}{2}q_0l^2+\frac{2}{3}C_1l-\frac{1}{12}q_0l^2$$

mit (2): $$\frac{2}{3}C_1l+\frac{5}{12}q_0l^2=-\frac{1}{2}q_0l^2$$
$$\Rightarrow \underline{C_1=-\frac{11}{8}q_0l} \qquad \Rightarrow \underline{C_2=\frac{3}{8}q_0l^2}$$

mit (3): $$\frac{1}{6}q_0l^3-\frac{11}{16}q_0l^3+\frac{3}{8}q_0l^3=-\frac{1}{2}q_0l^3+C_7$$
$$\Rightarrow \underline{C_7=\frac{17}{48}q_0l^3}$$

mit (4): $$\frac{1}{24}q_0l^4-\frac{11}{48}q_0l^4+\frac{3}{16}q_0l^4=-\frac{1}{4}q_0l^4+\frac{17}{48}q_0l^4+C_8$$
$$\Rightarrow \underline{C_8=-\frac{5}{48}q_0l^4}$$

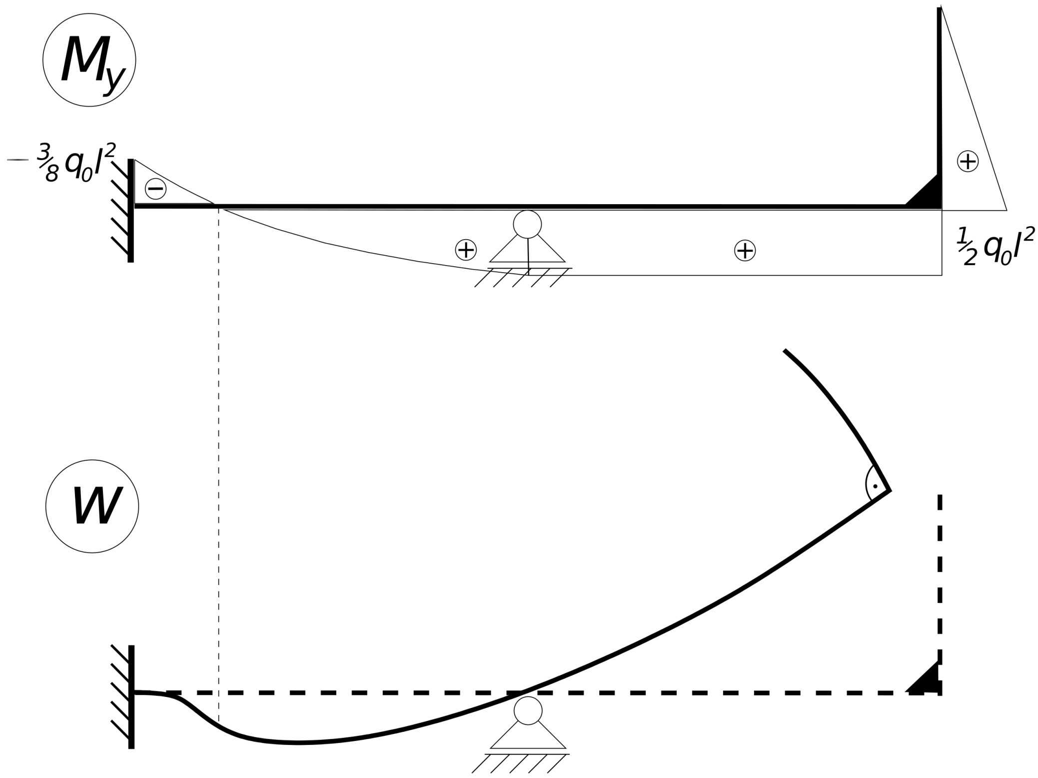
Bereich I

$$\underline{\underline{w_I(x)=\frac{1}{EI}(\frac{1}{24}q_0x^4-\frac{11}{48}q_0lx^3+\frac{3}{16}q_0l^2x^2)}}$$

Bereich II

$$\underline{\underline{w_{II}(x)=\frac{1}{EI}(-\frac{1}{4}q_0l^2x^2+\frac{17}{48}q_0l^3x-\frac{5}{48}q_0l^4)}}$$

b) Momenten- und Biegelinie für A – B – C – D

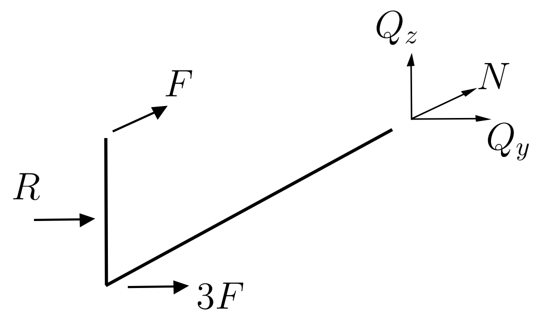


3. Aufgabe Lösung:

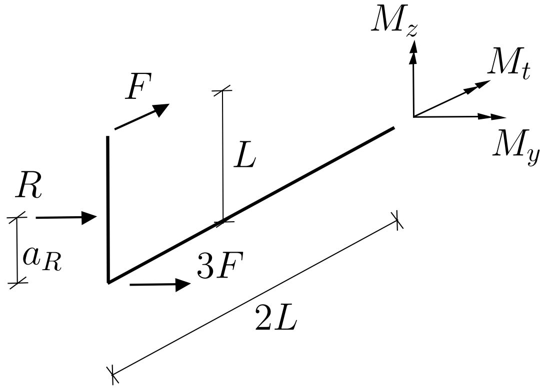
a) Schnittgrößen an der Einspannstelle A:

$$R = \frac{3}{4}\, qL = \frac{3}{4}\, 100 \cdot 2{,}7\, \frac{N}{m} m = 202{,}5\ N$$

$$a_R = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{L}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{L}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\,\frac{4}{3}\, L = \frac{4}{9}\, L = 1{,}2\ m$$

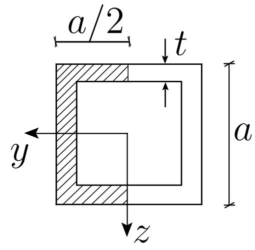


$$\sum F_x = 0: \quad N = -F = -400\ N$$
$$\sum F_y = 0: \quad Q_y = -R - 3\ F = -1402{,}5\ N$$
$$\sum F_z = 0: \quad Q_z = 0$$



$$\sum M_x^A = 0: \quad M_t = -R\ a_R = -243\ Nm$$
$$\sum M_y^A = 0: \quad M_y = F\ L = 1080\ Nm$$
$$\sum M_z^A = 0: \quad M_z = -(R + 3F)\ 2L = -7573{,}5\ Nm$$

b) Schubspannung infolge Querkraft:



$$\tau_Q = \frac{Q_y \cdot S_z}{I_z \cdot b(y)} = -\frac{1402{,}5 \cdot 33875}{2865833 \cdot 10}\ \frac{Nmm^3}{mm^5} \approx -1{,}66\frac{N}{mm^2}$$

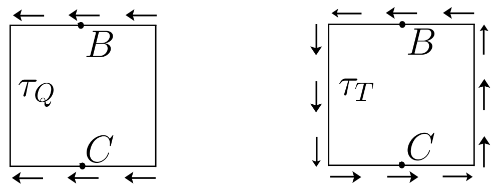
$$\begin{aligned} S_z &= A^{außen}\ y_S^{au} - A^{innen}\ y_S^{in} = a\ \frac{a}{2}\ \frac{a}{2 \cdot 2} - (a-2t)\ \frac{a-2t}{2}\ \frac{a-2t}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{8}\ (100^3 - 90^3)mm^3 = 33875\ mm^3 \\ I_y &= \frac{1}{12}\ (a \cdot a^3 - (a-2t)(a-2t)^3) = \frac{1}{12}\ (100^4 - 90^4)mm^4 \\ &= \frac{1}{12}\ (100^4 - 90^4)mm^4 \approx 2865833\ mm^4 \\ b(y) &= 2t = 10\ mm \end{aligned}$$

Schubspannung infolge Torsion: dünnwandig → 1. Bredt'sche Formel

$$\tau_T = \frac{M_T}{2A_m \cdot t_{min}} = -\frac{243000}{2 \cdot 9025 \cdot 5}\frac{Nmm}{mm^3} \approx -2{,}69\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\begin{aligned} A_m &= \left(a - \frac{2t}{2}\right)^2 = 95^2\ mm^2 = 9025\ mm^2 \\ t_{min} &= 5\ mm \end{aligned}$$

Superpostition:



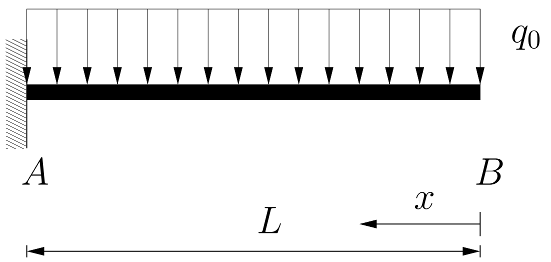
$$\tau_B = \tau_Q + \tau_T = (-1{,}66 - 2{,}69)\ \frac{N}{mm^2} = -4{,}35\ \frac{N}{mm^2}$$

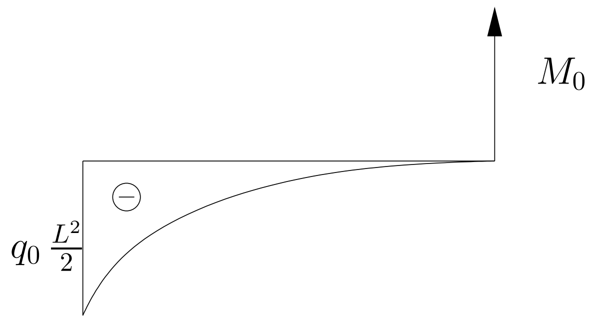
$$\tau_C = \tau_Q - \tau_T = (-1{,}66 + 2{,}69)\ \frac{N}{mm^2} = 1{,}03\ \frac{N}{mm^2}$$

4. Aufgabe Lösung:

a) die Auflagerkraft B,

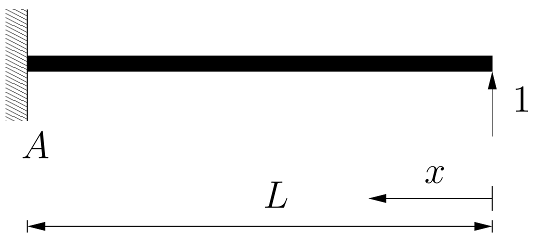
0-System

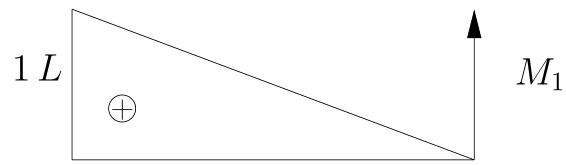




$$M_0(x) = -q_0\,\frac{x^2}{2}$$

1-System





$$M_1(x) = x$$

Einflusszahlen

$$\alpha_{10} = \int_0^L \frac{M_1\,M_0}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L x\,(-q_0\,\frac{x^2}{2})dx = -\frac{q_0\,L^4}{8\,EI}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L x^2\,dx = \frac{L^3}{3\,EI}$$

Kompatibilität/Auflagerkraft B

$$\alpha_{10} + X\,\alpha 11 = 0$$

$$\Rightarrow B = X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{3}{8}\,q_0\,L$$

b) den Funktionsverlauf des Biegemoments,

Momentenverlauf (Superposition)

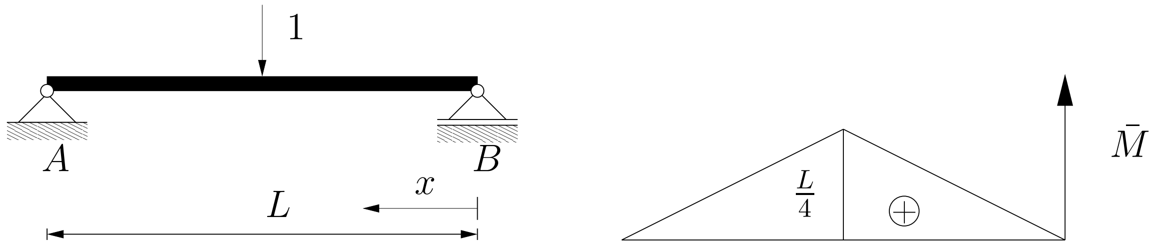
$$M(x) = M_0 + X\,M_1 = -q_0\,\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}\,q_0\,L\,x$$

Einspannmoment

$$M_A = M(L) = -\frac{1}{8}\,q_0\,L^2$$

c) sowie die Durchbiegung in der Mitte des Trägers.

1 Last in Richtung der unbekannten Verschiebung



$$\bar{M}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ -\frac{1}{2}\,x + \frac{L}{2} & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Reduktionssatz

$$\begin{aligned} f &= \int_0^L \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,dx \\ &= \frac{1}{EI}[\frac{7}{48}\,(-\frac{q_0\,L^2}{2})\,\frac{L}{4}\,L + \frac{1}{4}\,(\frac{3}{8}\,q_0\,L^2)\,\frac{L}{4}\,L] = \frac{1}{192}\,\frac{q_0\,L^4}{EI} \end{aligned}$$