Modulprüfung in Technischer Mechanik
am 04. März 2020

Dynamik

Aufgaben

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: _________________ Fachrichtung: _________________

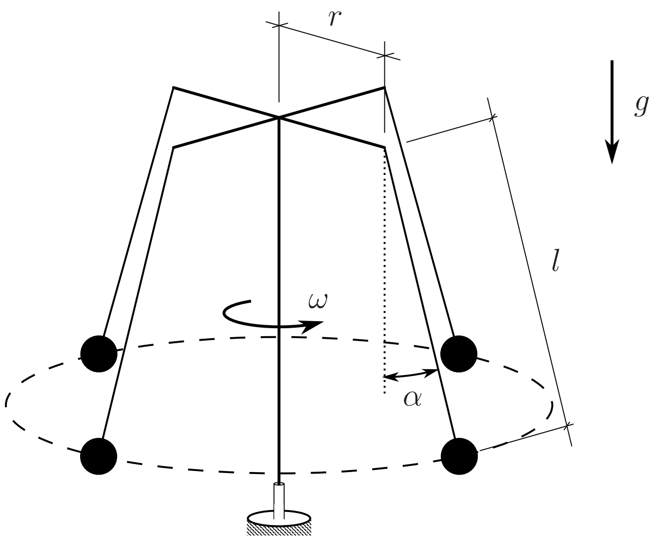
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

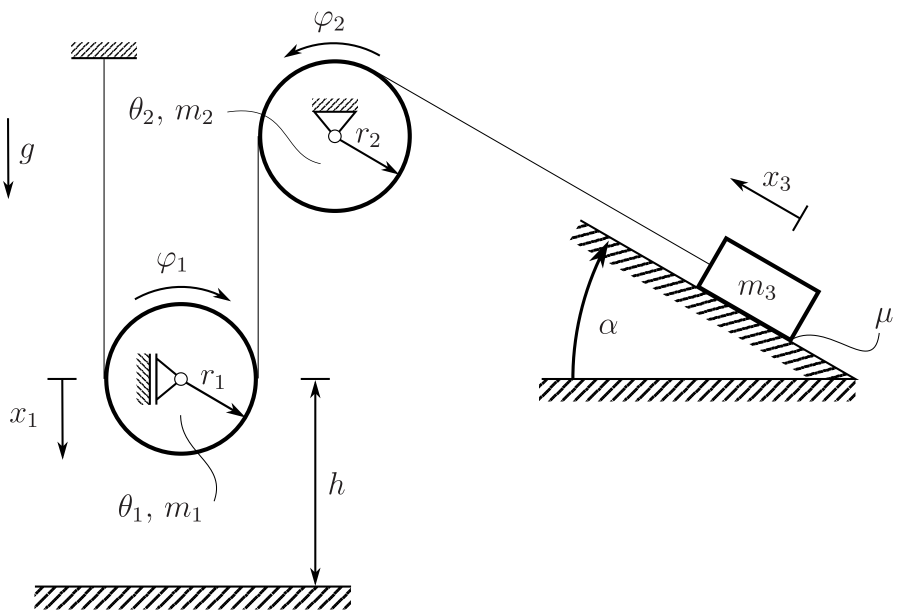
1. Aufgabe: (ca. 21 % der Gesamtpunkte)



In der Abbildung ist ein rotierendes Karussell skizziert. Sitz und Fahrgast können als Massenpunkt m angesehen werden. Das Karussell rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω sowie die Bahngeschwindigkeit v der Fahrgäste auf dem Karussell, wenn die Halteseile (Länge l) um den Winkel α gegen die Senkrechte geneigt sind?

Gegeben: α, m, g, r, l.

2. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



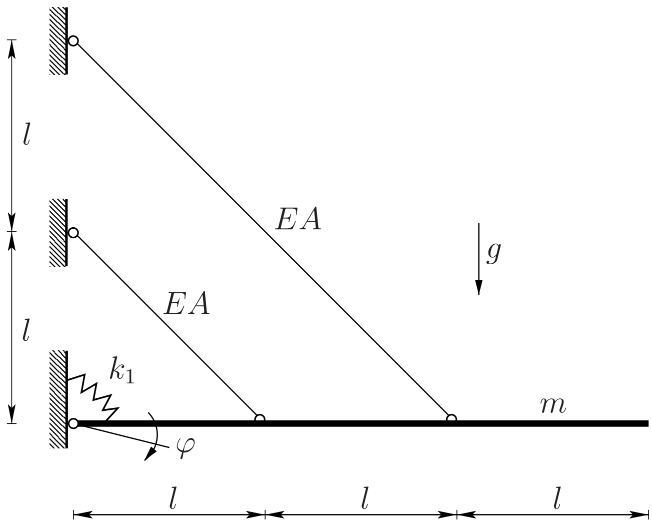
Das dargestellte System besteht aus einer vertikal frei beweglichen Rolle 1 (m_1, θ_1, r_1), einer gelenkig gelagerten Rolle 2 (m_2, θ_2, r_2) und einer Masse m_3, die über ein masseloses, dehnstarres Seil verbunden sind. Der Reibungskoeffzient zwischen der Masse m_3 und der schiefen Ebene ist μ. Das System befindet sich zu Beginn in Ruhe und der Mittelpunkt der Rolle 1 in einer Höhe h über dem Boden. Es ist davon auszugehen, dass das Seil auf den Rollen nicht gleitet.

a) Geben Sie die kinematischen Beziehungen zwischen den Koordinaten x_1, φ_1, φ_2 und x_3 an.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Geschwindigkeit, mit der die Rolle 1 auf dem Boden aufsetzt.

Gegeben: m_1, m_2, m_3, θ_1, θ_2, r_1, r_2, α, μ, g, h.

3. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Gegeben ist das dargestellte Modell des auskragenden Teils einer abgespannten Brücke im Freivorbau. Die Brücke besteht aus einem starren Balken der Länge $3\,l$ und der Masse m, der durch zwei um 45° geneigte Seile mit der Dehnsteifigkeit EA abgespannt ist. Die Massen der Seile sollen vernachlässigt werden. Die elastischen Eigenschaften des Balkens sind in einer Drehfeder mit der Steifigkeit k_1 konzentriert. Es soll angenommen werden, dass die Brücke nur kleine Schwingungen mit $\varphi \ll 1$ ausführt.

a) Geben Sie die Federsteifigkeiten der beiden Seile an.

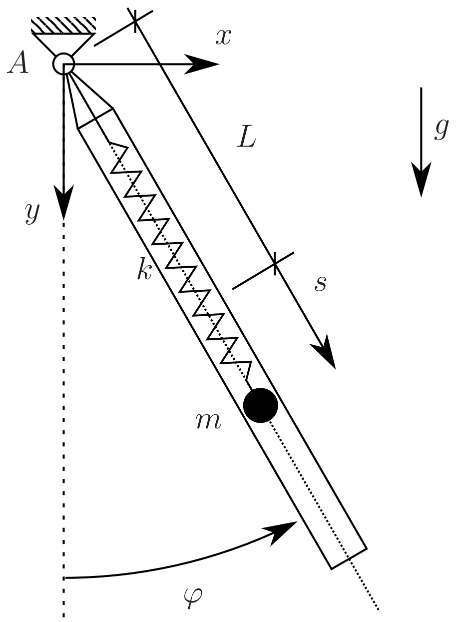
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems mit Hilfe der synthetischen Methode auf.

c) Bestimmen Sie die statische Ruhelage.

d) Bestimmen Sie die Eigenfrequenz des Systems.

Gegeben: $m,\ l,\ k_1,\ EA$.

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



In der oben dargestellten Vorrichtung wird eine Kugel (Punktmasse m) an einer Feder (Federsteifigkeit k) in einem masselosen Rohr geführt. Die Feder hat im entspannten Zustand die Länge L. Das Rohr ist im Punkt A aufgehängt und kann sich in der Zeichenebene um den Winkel φ frei bewegen. Die Koordinate s gibt die Bewegung der Masse m im Rohr bezogen auf die entspannte Länge L an.

a) Stellen Sie mit Hilfe der *Lagrangeschen Methode* die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Verwenden Sie hierzu die Koordinaten φ und s.

Im Folgenden sollen kleine Auslenkungen ($\varphi, \dot{\varphi} \ll 1$, $s \ll 1$) und nur die Bewegungsgleichung in der Koordinate s betrachtet werden.

b) Wie lautet die linearisierte Bewegungsgleichung für s?

c) Welche Eigenkreisfrequenz ω_s hat die Bewegung bzgl. der Koordinate s?

Gegeben: m, k, L, g.

Modulprüfung in Technischer Mechanik
am 04. März 2020

Dynamik

Lösungen

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ________________ Fachrichtung: ________________

Hinweise:

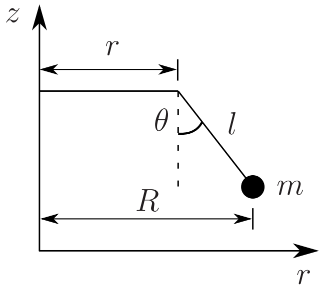
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

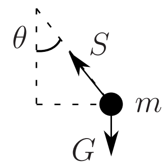
Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

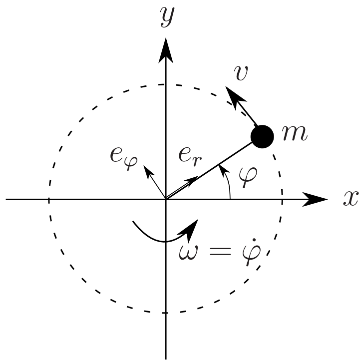
Lösung zu Aufgabe 1

$R = r + l\sin(\theta)$





$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$
$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$



geg.: $\dot{\varphi} = konst. \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$\rightarrow \quad r = konst. \quad \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S\sin(\theta) \\ 0 \\ S\cos(\theta) - G \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\dot{\varphi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für den Massepunkt muss gelten: $\vec{F} = m\vec{a}$, komponentenweise:

$$-S\sin(\theta) = -mR\omega^2 \tag{1}$$
$$S\cos(\theta) - G = 0 \tag{2}$$

Aus (2):

$$S = \frac{mg}{\cos(\theta)} \tag{3}$$

(3) in (1):

$$\frac{mg}{\cos(\theta)}\sin(\theta) = -m(r + l\sin(\theta))\,\omega^2$$
$$\omega^2 = \tan(\theta)\frac{g}{r + l\sin(\theta)}$$
$$\omega = \sqrt{\tan(\theta)\frac{g}{r + l\sin(\theta)}}$$

$$\text{mit } v = \omega\,R \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\tan(\theta)\,g\,(r + l\sin(\theta))}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Kinematik:

$$\begin{aligned} r_1\dot{\varphi}_1 &= \dot{x}_1 &\rightarrow\quad & r_1\varphi_1 = x_1 \\ r_2\dot{\varphi}_2 &= 2r_1\dot{\varphi}_1 &\rightarrow\quad & r_2\dot{\varphi}_2 = 2\dot{x}_1\,,\quad r_2\varphi_2 = 2x_1 \\ r_2\dot{\varphi}_2 &= \dot{x}_3 &\rightarrow\quad & r_2\dot{\varphi}_2 = 2\dot{x}_1\,, x_3 = 2x_1 \end{aligned}$$

b) Arbeitssatz:

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 + W^*|_1^2 \quad (*)$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = x_3 = 0 \\ &\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{x}_3 = 0 \\ &T_1 = 0 \\ &V_1 = 0 \end{aligned}$$

ges.: $\dot{x}_1 \quad\rightarrow\quad$ mithilfe von a) alle Terme in Abhängigkeit von x_1 oder $\dot{x}_1$ schreiben

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V_2 &= m_3 g \sin(\alpha)\, x_3 - m_1 g\, x_1 \\ &= m_3 g \sin(\alpha)\, 2x_1 - m_1 g\, x_1 \end{aligned}$$

Reibarbeit:

$$\begin{aligned} W^*|_1^2 &= -\mu\, m_3 g \cos(\alpha)\, x_3 \\ &= -\mu\, m_3 g \cos(\alpha)\, 2x_1 \end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}\, m_3\, \dot{x}_3^2 + \tfrac{1}{2}\, \theta_2\, \dot{\varphi_2}^2 + \tfrac{1}{2}\, \theta_1\, \dot{\varphi_1}^2 + \tfrac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\, m_3 (4\dot{x}_1^2) + \frac{1}{2}\, \theta_2 \left(\frac{4}{r_2^2}\, \dot{x}_1^2 \right) + \frac{1}{2}\, \theta_1 \left(\frac{\dot{x}_1^2}{r_1^2} \right) + \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 \end{aligned}$$

Einsetzen in $(*)$, beim Aufsetzen auf dem Boden $x_1 = h - r_1$

$$\dot{x}_1^2 = \frac{-2\mu\, m_3 g \cos(\alpha) - 2m_3 g \sin(\alpha) + m_1 g}{4m_3 + \theta_2 \frac{4}{r_2^2} + \theta_1 \frac{1}{r_1^2} + m_1}\, 2x_1$$

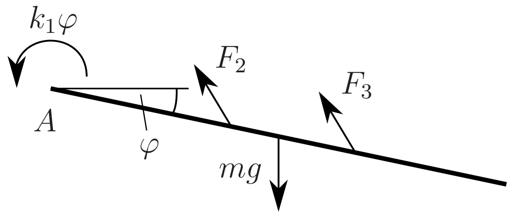
$$\dot{x}_1 = \sqrt{\frac{-2\mu\, m_3 g \cos(\alpha) - 2m_3 g \sin(\alpha) + m_1 g}{4m_3 + \theta_2 \frac{4}{r_2^2} + \theta_1 \frac{1}{r_1^2} + m_1}}\, \sqrt{2(h - r_1)}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Ersatzfedersteifigkeiten:

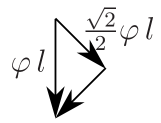
$$k_2 = \frac{EA}{\sqrt{2}\,l} \qquad\qquad k_3 = \frac{EA}{2\sqrt{2}\,l}$$

b) Freischnitt:

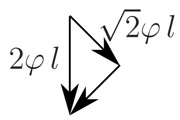


Trägheitsmoment bzgl. Punkt A: $\theta^{(A)} = \dfrac{m\,(3l)^2}{3} = 3ml^2$

Federkräfte F_2 und F_3:



$$F_2 = k_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi\, l = \frac{1}{2}EA\,\varphi$$



$$F_3 = k_3 \cdot \sqrt{2}\varphi\, l = \frac{1}{2}EA\,\varphi$$

Aufstellen der Bewegungsgleichung:

$$\Sigma\, M^{(A)} = \theta^{(A)}\ddot{\varphi}: \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}EA\,\varphi\cdot l - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}EA\,\varphi\cdot 2l - k_1\cdot\varphi + mg\frac{3}{2}l = \theta^{(A)}\ddot{\varphi}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{k_1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,EAl}{3ml^2}\,\varphi = \frac{g}{2l}}$$

c) Statische Ruhelage: $\rightarrow \quad \ddot{\varphi} = 0$

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{g}{2l}\left(\frac{3ml^2}{k_1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,EAl}\right)}$$

d) Eigenkreisfrequenz siehe Bewegungsgleichung

Lösung zu Aufgabe 4

a) Bewegungsgleichungen des Systems in φ und s:

1. Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L+s)\,\sin\varphi \\ (L+s)\,\cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}\sin\varphi + (L+s)\cos(\varphi)\,\dot{\varphi} \\ \dot{s}\cos\varphi - (L+s)\sin(\varphi)\,\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot{s}^2 + ((L+s)\dot{\varphi})^2$$

2. Energien:

i) Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\, m \left(((L+s)\,\dot{\varphi})^2 + \dot{s}^2\right)$$

ii) Potentielle Energie

$$\begin{aligned} V = -mg\,(L+s)\,\cos(\varphi) & \quad \text{(Lage)} \\ + \frac{k\,s^2}{2} & \quad \text{(Feder)} \end{aligned}$$

3. Lagrange-Anteile:

i) s-Koordinate

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right] = m\ddot{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = m(L+s)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -mg\,\cos\varphi + ks$$

$$\text{in} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right] - \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{m\ddot{s} - m\,(L+s)\,\dot{\varphi}^2 - mg\,\cos\varphi + ks = 0}$$

ii) φ-Koordinate

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\,(L+s)^2\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right] = m\,(L+s)^2\,\ddot{\varphi} + 2m\,(L+s)\,\dot{s}\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mg\,(L+s)\sin\varphi$$

$$\text{in} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{m\,(L+s)^2\,\ddot{\varphi} + 2m\,(L+s)\,\dot{s}\,\dot{\varphi} + mg\,(L+s)\sin\varphi = 0}$$

4. Gesamt:

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{k}{m}\,s - (L+s)\,\dot{\varphi}^2 - g\,\cos\varphi = 0}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{L+s}\sin\varphi + \frac{2}{L+s}\dot{s}\,\dot{\varphi} = 0}$$

b) linearisierte Bewegungsgleichung für s:

$$\ddot{s} + \frac{k}{m}s = g$$

c) Eigenkreisfrequenz ω_s bzgl. der Koordinate s:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$