Prüfung in

Baudynamik

01. März 2021

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 19% der Gesamtpunkte)

a) Betrachtet wird folgende Funktion

$$x(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < -\dfrac{3\pi}{\Omega} \\ x_0 \cos(\Omega t) & : \quad -\dfrac{3\pi}{\Omega} \leq t \leq \dfrac{3\pi}{\Omega} \\ 0 & : \quad t > \dfrac{3\pi}{\Omega} \end{cases}$$

Begründen Sie, welche Art von Amplitudenspektrum sich aus dem Fourierintegral im Frequenzbereich ergibt? Bei welcher Frequenz erwarten Sie im Amplitudenspektrum einen Höchstwert?

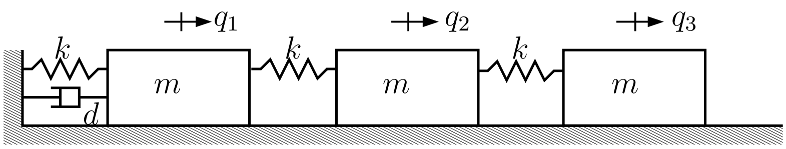
b) Es liegt folgendes Modell eines gedämpften, fremderregten Schwingers vor.

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + k\,x = F_0\,\cos(\Omega\,t)$$

Die Lösung besteht aus einem homogenen und einem partikulären Anteil. Erläutern Sie diese Anteile. Begründen Sie, welcher Anteil für baudynamische Aspekte von höherer Relevanz ist.

c) Skizzieren Sie die Vergrößerungsfunktion für Fundamenterregung $V_2(\eta, D)$ unter der Annahme, dass Dämpfung keine Rolle spielt. Zeichnen Sie drei wichtige Punkte ein und skizzieren Sie den restlichen Verlauf.

d) Ist die notwendige Bedingung für durchdringende Dämpfung für das abgebildete System erfüllt? *Gegeben:* m, d, k



Musterlösung - Aufgabe 1

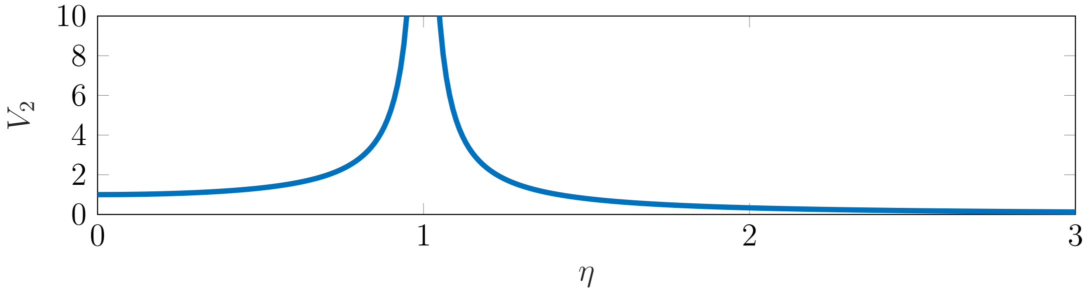
a) i) kontinuierliches Spektrum da nichtperiodische Funktion

ii) Ω

b) Der homogene Anteil dämpft sich nach der Einschwingphase raus und es verbleibt der stationäre Anteil.

- homogener Anteil: Eigenschwingung
- partikulärer Anteil: Stationäre Lösung

c) $(0, 1), (1, \infty), (3, 0)$



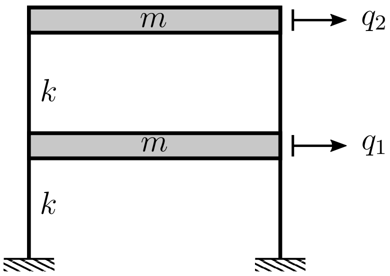
d)

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$d > 0$ d.h. $\boldsymbol{D}$ ist positiv semi-definit, d.h. das System ist nicht vollständig gedämpft.

2. Aufgabe: (ca. 21% der Gesamtpunkte)

Gegeben sei der dargestellte Stockwerkrahmen und die zugehörige Bewegungsgleichung.



$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Geg.: m, k.

a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren.

c) Entkoppeln Sie das System mit Hilfe der modalen Transformation.

d) Berechnen Sie die spezielle Lösung für eine Böe, die dem Bauwerk eine plötzliche Anfangsgeschwindigkeit versetzt:

$$\boldsymbol{q}(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{q}}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Musterlösung - Aufgabe 2

a)

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2\, \boldsymbol{M}) = 0$$
$$\omega^4 - 3\,\frac{k}{m}\,\omega^2 + (\frac{k}{m})^2 = 0$$
$$\omega_1 = 0.62\,\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 1.62\,\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b)

$$\kappa_1 = 1.62, \quad \kappa_2 = -0.62$$
$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.62 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{bmatrix}$$

c) Entkopplung

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.62 & -0.62 \end{bmatrix}$$
$$\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\Phi}}_{\tilde{\boldsymbol{M}}}\, \ddot{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\Phi}}_{\tilde{\boldsymbol{K}}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Durch Entkopplung ergibt sich Diagonalform, so dass

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2\, x_1 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2\, x_2 = 0$$

d) Ansatz

$$x_i = A_i\, \cos(\omega_i\, t) + B_i\, \sin(\omega_i\, t), \quad i = 1, 2$$

Anfangsbedingungen transformieren mit

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\, \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \frac{1}{-2.24} \begin{bmatrix} -0.62 & -1 \\ -1.62 & 1 \end{bmatrix}$$

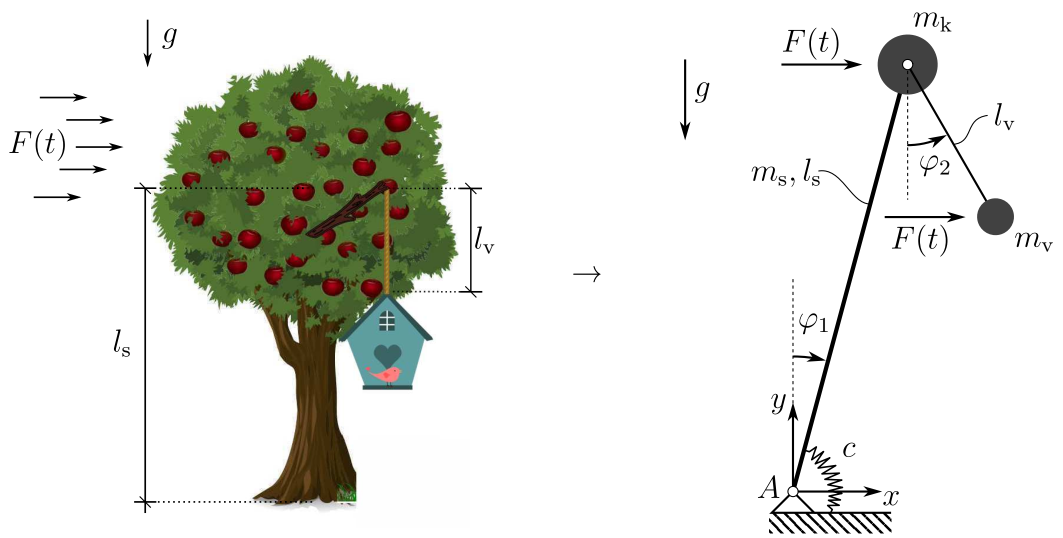
ergibt

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\Phi}^{-1}\, \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{bmatrix} \omega_1\, B_1 \\ \omega_2\, B_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\Phi}^{-1}\, \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.72 \\ 0.28 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.17 \\ 0.17 \end{bmatrix}$$

Rücktransformation

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi} \begin{bmatrix} A_1\, \cos(\omega_1\, t) + B_1\, \sin(\omega_1\, t) \\ A_1\, \cos(\omega_2\, t) + B_2\, \sin(\omega_2\, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.17\, \sin(\omega_1\, t) + 0.17\, \sin(\omega_2\, t) \\ 1.90\, \sin(\omega_1\, t) - 0.11\, \sin(\omega_2\, t) \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe: (ca. 39% der Gesamtpunkte)



Sie möchten den Apfelbaum in Ihrem Garten gegen Windbelastung schützen. Um die auftretenden Schwingungen einzudämmen, montieren Sie ein Vogelhäuschen als Schwingungstilger. Für die Bemessung gehen Sie von obigem, rechten Modell aus. Der Baumstamm (Masse m_s, Länge l_s) sei gelenkig mit dem Boden verbunden. Die Biegesteifigkeit des Stamms sei über eine Drehfeder (Steifigkeit c) modelliert. Die Krone des Baums (Punktmasse m_k) ist fest mit dem Stamm verbunden. In der Mitte der Krone sei gelenkig ein masseloser Stab (Länge l_v) sowie das Vogelhäuschen (Masse m_v) angebracht. Die Windbelastung $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$ greift horizontal an der Punktmasse der Krone sowie an der des Vogelhäuschens an.

Gegeben: $m_\mathrm{s}, m_\mathrm{k}, m_\mathrm{v}, l_\mathrm{s}, l_\mathrm{v}, c, F_0, \Omega, J_{A\mathrm{s}}, g$

a) Bestimmen Sie die Beschleunigung des Vogelhäuschens im xy-Koordinatensystem in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2. Linearisieren Sie diese anschließend bzgl. Winkel, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung.

b) Bestimmen Sie die linearisierten Bewegungsgleichung(en) des Modells mit Hilfe der synthetischen Methode (Freischnitt). Das Massenträgheitsmoment des Stamms bzgl. des Punkts A ($J_{A\mathrm{s}}$) kann als gegeben getrachtet werden.

c) Bestimmen Sie die Länge l_v des Vogelhaus-Stabes so, dass für eine gegebene Belastungsfrequenz Ω die Bewegung der Krone vollständig getilgt wird ($\varphi_1 = 0$).

d) Über welchen Parameter des Vogelhäuschens können Sie im Fall der Tilgung das Wohlempfinden (Stichwort: G-Kräfte) der Bewohner des Vogelhäuschens sicherstellen und wie müssen Sie den Parameter verändern, um die G-Kräfte zu reduzieren?

Hinweis: *Lösungen mit anderen Methoden als der synthetischen werden nicht gewertet.*

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Beschleunigung des Vogelhäuschens:

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{v} = \begin{bmatrix} l_\mathrm{s}\sin(\varphi_1) + l_\mathrm{v}\sin(\varphi_2) \\ l_\mathrm{s}\cos(\varphi_1) - l_\mathrm{v}\cos(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

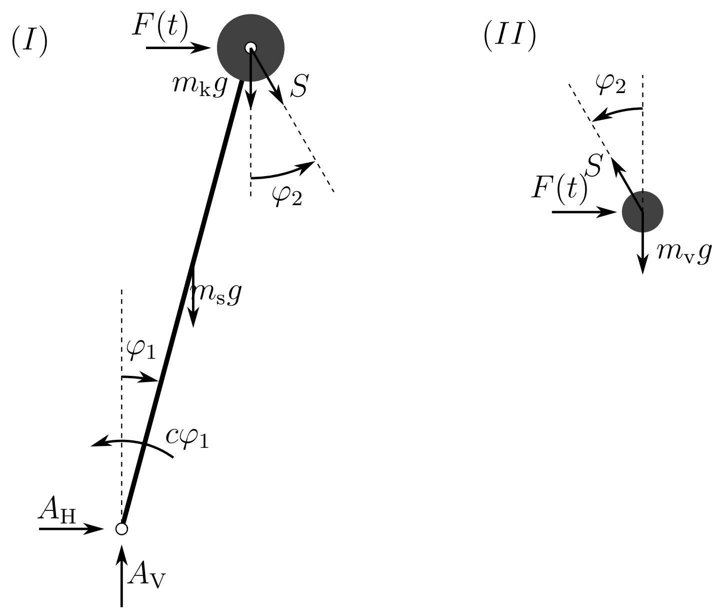
$$\dot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{v} = \begin{bmatrix} l_\mathrm{s}\cos(\varphi_1)\dot\varphi_1 + l_\mathrm{v}\cos(\varphi_2)\dot\varphi_2 \\ -l_\mathrm{s}\sin(\varphi_1)\dot\varphi_1 + l_\mathrm{v}\sin(\varphi_2)\dot\varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\mathrm{v} = \begin{bmatrix} l_\mathrm{s}\cos(\varphi_1)\ddot\varphi_1 - l_\mathrm{s}\sin(\varphi_1)\dot\varphi_1{}^2 + l_\mathrm{v}\cos(\varphi_2)\ddot\varphi_2 - l_\mathrm{v}\sin(\varphi_2)\dot\varphi_2{}^2 \\ -l_\mathrm{s}\sin(\varphi_1)\ddot\varphi_1 - l_\mathrm{s}\cos(\varphi_1)\dot\varphi_1{}^2 + l_\mathrm{v}\sin(\varphi_2)\ddot\varphi_2 + l_\mathrm{v}\cos(\varphi_2)\dot\varphi_2{}^2 \end{bmatrix}$$

Taylorreihen-Entwicklung um die statische Ruhelage:

$$\begin{aligned} \mathrm{lin}(\ddot{\boldsymbol{r}})\Big|_\mathrm{RL} &= \ddot{\boldsymbol{r}}(\mathrm{RL}) + \frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}}{\partial\varphi_1}\Big|_\mathrm{RL}\cdot\varphi_1 + \frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}}{\partial\varphi_2}\Big|_\mathrm{RL}\cdot\varphi_2 + \\ &\quad + \frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}}{\partial\dot\varphi_1}\Big|_\mathrm{RL}\cdot\dot\varphi_1 + \frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}}{\partial\dot\varphi_2}\Big|_\mathrm{RL}\cdot\dot\varphi_2 + \frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}}{\partial\ddot\varphi_1}\Big|_\mathrm{RL}\cdot\ddot\varphi_1 + \frac{\partial\ddot{\boldsymbol{r}}}{\partial\ddot\varphi_2}\Big|_\mathrm{RL}\cdot\ddot\varphi_2 = \\ &= \begin{bmatrix} l_\mathrm{s}\ddot\varphi_1 + l_\mathrm{v}\ddot\varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Freischnitt



I)

$$\begin{aligned} M_A : J\ddot\varphi_1 &= -c\varphi_1 + gm_\mathrm{s}\sin(\varphi_1)\frac{l_\mathrm{s}}{2} + gm_\mathrm{k}\sin(\varphi_1)l_\mathrm{s} + S\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1)l_\mathrm{s} + \\ &\quad + S\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1)l_\mathrm{s} + F(t)l_\mathrm{s}\cos(\varphi_1) \\ &\quad \text{mit } J = m_\mathrm{k}l_\mathrm{s}^2 + J_A \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} F_x &: m_\mathrm{v}\ddot r_{v_x} = -S\sin(\varphi_2) + F(t) \\ F_y &: S\cos(\varphi_2) = m_\mathrm{v} g \end{aligned}$$

mit Linearisierung und Einsetzen von $S = m_\mathrm{v}g$ folgt:

$$J\ddot\varphi_1 + \left(c - \frac{1}{2}gm_\mathrm{s}l_\mathrm{s} - gm_\mathrm{k}l_\mathrm{s} - gm_\mathrm{v}l_\mathrm{s}\right)\varphi_1 - (gm_\mathrm{v}l_\mathrm{s})\,\varphi_2 = F(t)l_\mathrm{s} \qquad (I)'$$

$$m_\mathrm{v}l_\mathrm{s}\ddot\varphi_1 + m_\mathrm{v}l_\mathrm{v}\ddot\varphi_2 + gm_\mathrm{v}\varphi_2 = F(t) \qquad (II)'$$

c) Bestimmung von l_s:

$$\ddot{\varphi}_1 \stackrel{!}{=} 0,\ \varphi_1 \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ (I)' : \varphi_2 = \frac{-F(t)}{g m_\mathrm{v}} \ \Rightarrow\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{F(t)\Omega^2}{g m_\mathrm{v}}$$

Einsetzen in (II)' mit $\ddot{\varphi}_1 = 0$:

$$m_\mathrm{v} l_\mathrm{v} \left(\frac{F(t)\Omega^2}{g m_\mathrm{v}}\right) + g m_\mathrm{v} \left(\frac{-F(t)}{g m_\mathrm{v}}\right) = F(t) \quad \Big| \ /F(t)$$

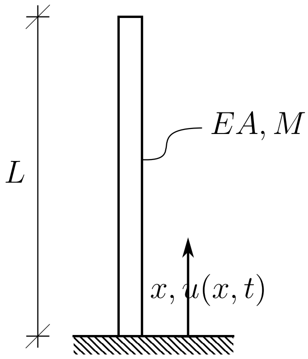
$$\Rightarrow\ l_\mathrm{v} = \frac{2g}{\Omega^2}$$

d) Welcher Parameter? m_v

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\Omega^2 F(t)}{g m_\mathrm{v}} \ \rightarrow\ \ddot{\varphi}_2 \sim \frac{1}{m_\mathrm{v}}$$

(Problem: Masse des Vogelhäuschens muss sehr groß sein, damit G-Kräfte klein.)

4. Aufgabe: (ca. 21% der Gesamtpunkte)



Gegeben sei der links abgebildete Dehnstab (Länge L, Dehnsteifigkeit EA). Im Zuge der Aufgabe soll die erste Eigenfrequenz ω_1 genähert werden. Bearbeiten Sie dafür die folgenden Teilaufgaben. Die Erdbeschleunigung kann vernachlässigt werden.

Gegeben: M, L, E, A, ρ

a) Stellen Sie mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode und einer Unterteilung des Stabs in **drei** finite Elemente ein reduziertes System von Bewegungsgleichungen für die Verschiebung $u(x,t)$ auf.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und eines linearen Ansatzes für die erste Eigenform eine obere Schranke für die erste Eigenfrequenz.

c) Beurteilen Sie die Güte Ihrer Rayleigh-Schätzung aus Aufgabenteil b). Wie lässt sich eine mögliche Abweichung begründen bzw. wie könnten Sie die Schätzung verbessern?

Hinweise:

- *Für ein finites Dehnstabelement der Länge l und der längenbezogenen Masse m (Einheit [kg/m]) soll hier gelten:*

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\,, \quad \boldsymbol{M}^e = \frac{ml}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Die analytische Lösung der k-ten Eigenfrequenz ω_k lautet*

$$\omega_k = \frac{2k-1}{2}\pi\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \qquad \textit{mit Dichte } \rho = \frac{M}{AL}$$

Musterlösung - Aufgabe 4

a) DGL via Superposition mit $M = 3ml,\ L = 3l$

$$\Rightarrow ml = \frac{M}{3}\,,\ l = \frac{L}{3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K}_\mathrm{G} = \frac{EA}{L/3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\,,\ \boldsymbol{M}_\mathrm{G} = \frac{1}{6}\left(\frac{M}{3}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

reduziertes System:

$$\frac{M}{18}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{3EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \text{mit } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) lineare Verformung $\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^\mathrm{T}$

$$\Rightarrow\ R = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\frac{3EA}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\frac{M}{18}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{3EA}{ML}$$

$$\Rightarrow\ \omega_1 \leq \bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{3EA}{ML}} \approx 1.73\sqrt{\frac{EA}{ML}}$$

c) analytische Lösung mit Hinweis:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{EA}{ML}} \approx 1.57\sqrt{\frac{EA}{ML}}$$

Beobachtungen:

a) Es gilt $\bar{\omega}_1 \geq \omega_1$ (Rayleigh tatsächlich obere Schranke)

b) $\bar{\omega}_1 > \omega_1$, da nur genäherte Massenverteilung. Mit mehr finiten Elementen nähert sich $\sqrt{R}$ der analytischen Lösung an. (z.B. für $n = 5$: $\bar{\omega}_1 \approx 1.16\sqrt{EA/ML}$)

Prüfung in
Baudynamik
am 01. März 2021

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....