Modulprüfung

# Dynamik

20. März 2021

Name: ............................................... Vorname: .............................................

Matr.-Nr: ................... Studiengang: ................................................................

**Hinweise:**

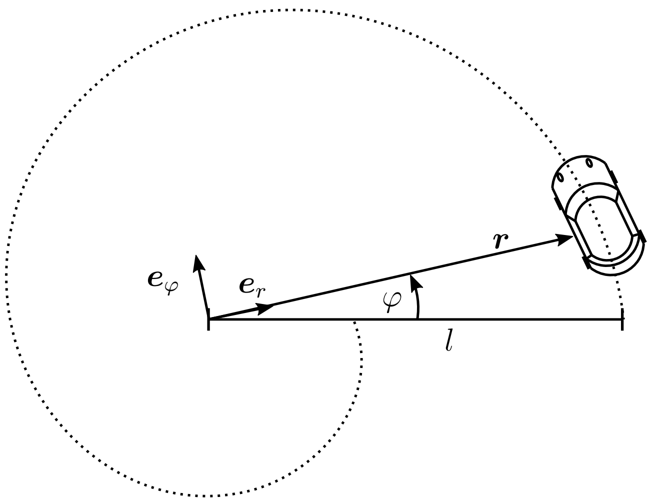
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | |
| Korrektor | | | | | |

(Eintrag erfolgt durch Institut)

# 1. Aufgabe: (ca. 17 % der Gesamtpunkte)




Ein Auto fährt durch eine Kurve. Die Kurve ist im betrachteten Bereich ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) spiralförmig mit dem Radius $r(\varphi) = l(1 - \frac{\varphi}{3\pi})$. Das Auto erfährt während des betrachteten Bewegungsabschnitts eine konstante Winkelverzögerung $\ddot{\varphi} = -b$.

a) Geben Sie den Winkel $\varphi$ in Abhängigkeit der Zeit $t$ an.

b) Wie groß ist $b$, wenn das Auto beim Einfahren in die Kurve eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega_0$ hat und am Ende der Kurve zum Stillstand kommt? Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $\varphi(t = 0) = 0$.

c) Ermitteln Sie den Radius in Abhängigkeit der Zeit.

d) Wie groß ist der Radius am Ende des betrachteten Bewegungsabschnitts?

*Hinweis: Die Aufgabe ist im dargestellten Polarkoordinatensystem zu lösen.*

Gegeben: $l$, $r(\varphi) = l(1 - \frac{\varphi}{3\pi})$, $\varphi(t = 0) = 0$, $\omega_0 = \frac{4\pi}{t_v}$, $t_v$

**Musterlösung - Aufgabe 1**

a)

$$\ddot{\varphi}(t) = -b$$
$$\dot{\varphi}(t) = -bt + C_1$$
$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}bt^2 + C_1 t + C_2$$

Anfangsbedingungen $\varphi(0) = C_2 = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = C_1 = \omega_0 = \frac{4\pi}{t_v}$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}bt^2 + \frac{4\pi}{t_v}t$$

b) Das Auto kommt am Ende der Kurve ($\varphi(t_E) = 2\pi$) zum Stehen ($\dot{\varphi}(t_E) = 0$).
Variante 1:
Ausrechnen von $t_E$ aus $\dot{\varphi}(t_E) = 0$:

$$\dot{\varphi}(t_E) = 0$$
$$\Rightarrow t_E = \frac{\omega_0}{b} = \frac{4\pi}{t_v b}$$

Ausrechnen von $b$:

$$\varphi(t_E) = 2\pi$$
$$\Rightarrow 2\pi = -\frac{1}{2}b\frac{16\pi^2}{{t_v}^2 \cdot b^2} + \frac{16\pi^2}{t_v^2 \cdot b}$$
$$\Rightarrow b = \frac{4\pi}{t_v^2}$$

oder Variante 2:
Ausrechnen von $t_E$ aus $\varphi(t_E) = 2\pi$:

$$\varphi(t_E) = 2\pi = \frac{1}{2}bt_E^2 + \frac{4\pi}{t_v}t_E$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}bt_E^2 - \frac{4\pi}{t_v}t_E + 2\pi$$
$$0 = t_E^2 - \frac{8\pi}{t_v \cdot b} + \frac{4\pi}{b}$$
$$t_{E_{1/2}} = \frac{4\pi}{t_v \cdot b} \pm \sqrt{\frac{16\pi^2}{{t_v}^2 \cdot b^2} - \frac{4\pi}{b}}$$

Ausrechnen von $b$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t_E) = 0 &= -b\left(\frac{4\pi}{t_v b} \pm \sqrt{\frac{16\pi^2}{{t_v}^2 \cdot b^2} - \frac{4\pi}{b}}\right) + \omega_0 \\
0 &= \left[\pm\sqrt{\frac{16\pi^2}{{t_v}^2 \cdot b^2} - \frac{4\pi}{b}}\;\right]^2 \\
0 &= \frac{16\pi^2}{{t_v}^2 \cdot b^2} - \frac{4\pi}{b} \\
\frac{1}{b} &= \frac{4\pi}{{t_v}^2 \cdot b^2} \Rightarrow b = \frac{4\pi}{t_v^2}
\end{aligned}
$$

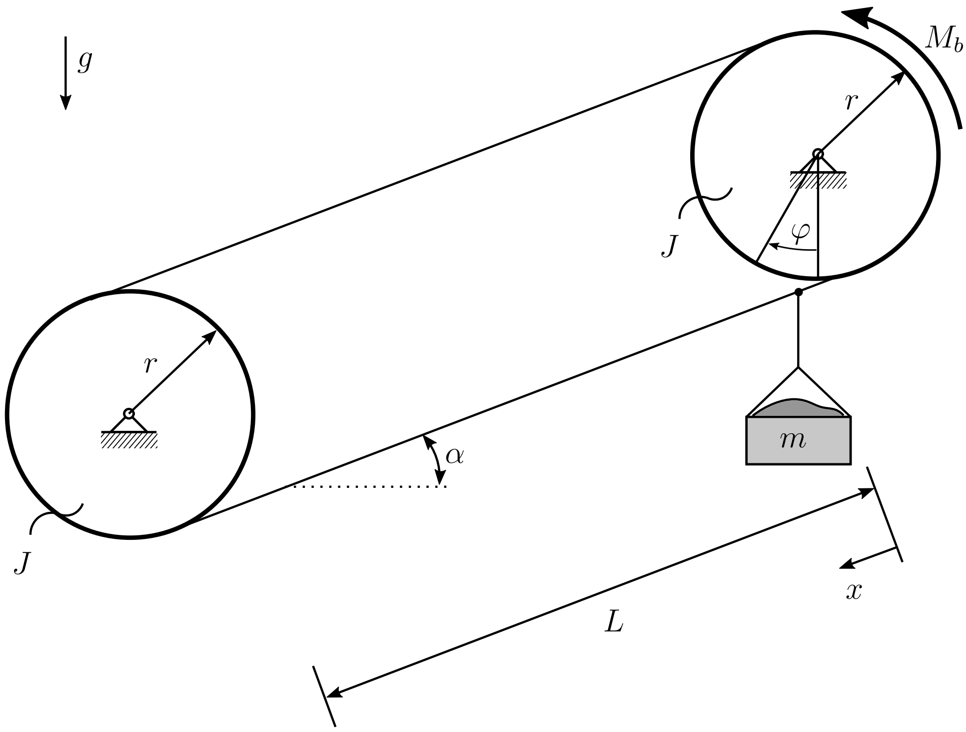
c)

$$
\begin{aligned}
r(t) &= l\left(1 - \frac{\varphi(t)}{3\pi}\right) \\
&= l\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3t_v^2}t^2 - \frac{4\pi}{3t_v}t\right)\right) \\
&= l\left[1 + \frac{2\pi}{3t_v^2}t^2 - \frac{4\pi}{3t_v}t\right]
\end{aligned}
$$

d)

$$
r(\varphi_E = 2\pi) = l\left(1 - \frac{2\pi}{3\pi}\right) = \frac{1}{3}l
$$

## 2. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)




Die Skizze zeigt eine Transportseilbahn, welche um den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ zur Horizontalen geneigt ist. Über zwei gleiche Räder (Trägheitsmoment $J = \frac{1}{2} m\, r^2$, Radius $r$) ist ein Seil gespannt. Das Seil ist so gespannt, dass es als Gerade zwischen den beiden Rädern angenommen werden kann. Es kann davon ausgegangen werden, dass kein Schlupf zwischen dem Seil und den Rädern stattfindet. Ansonsten können Reibungseffekte vernachlässigt werden.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat der Behälter mit der Masse $m$ die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{gL}$. Für $0 \leq x \leq \frac{2}{3}L$ bewegt sich das System frei. Im Bereich $\frac{2}{3}L < x \leq L$ wirkt auf das obere Rad ein linear ansteigendes Bremsmoment $M_b = M_t\,(\varphi - \varphi_b)$ mit $\varphi_b = \frac{2}{3}\frac{L}{r}$ am oberen Rad. Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $\varphi(t) = 0$.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ in Abhängigkeit vom Weg $x$ im Bereich $0 \leq x \leq \frac{2}{3}L$? Skizieren Sie den Verlauf von $v(x)$ qualitativ.
Wie groß ist die Geschwindigkeit $v$ an der Stelle $x = \frac{2}{3}L$?

b) Wie groß muss das Moment $M_t$ sein, damit der Behälter mit der Masse $m$ bei $x = L$ zum Stillstand kommt?

*Hinweis: Die Aufgabe ist mit Hilfe des Arbeitssatzes zu lösen. Andere Lösungen werden nicht gewertet.*

Gegeben: $L$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $J = \frac{1}{2}\, m\, r^2$, $r$, $g$, $v_0 = \sqrt{gL}$

**Musterlösung - Aufgabe 2**

a) Kinematik:

$$\varphi = \frac{x}{r} \quad \text{bzw. } \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Anfangslage 0 bei $x = 0$:

$$T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}mr^2\frac{v_0^2}{r^2} = mv_0^2 = mgL$$
$$U_0 = 0$$

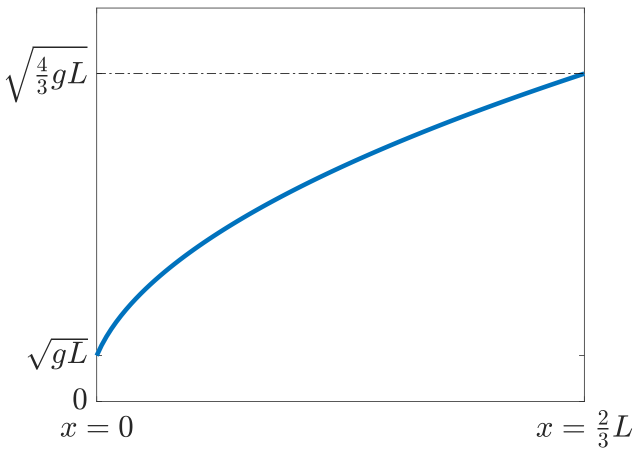
Endlage 1 bei $x$:

$$T_1 = \frac{1}{2}mv(x)^2 + \frac{1}{2}mv(x)^2$$
$$U_1 = -mgx\ \sin(\alpha) = -mgx\frac{1}{2}$$

Arbeitssatz:

$$T_0 + U_0 = T_1 + U_1$$
$$mgL = mv(x)^2 - mg\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow v(x) = \sqrt{g + \left(L + \frac{x}{2}\right)} \qquad v\left(\frac{2}{3}L\right) = \sqrt{\frac{4}{3}gL} = v_1$$




b) Anfangslage 1 bei $x = \frac{2}{3}L$:

$$T_1 = mv_1^2 = \frac{4}{3}gLm$$
$$U_1 = 0$$

Endlage 2 bei $x = L$:

$$\begin{aligned}
T_2 &= 0 \\
U_2 &= -\frac{1}{3} Lmg \sin(\alpha) = \frac{-1}{6} Lmg
\end{aligned}$$

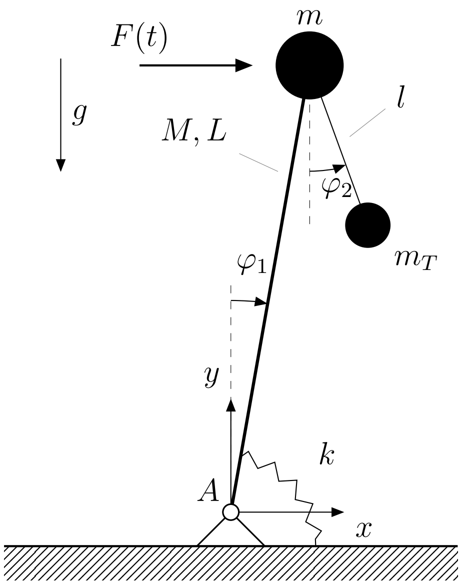
Arbeit der Nichtpotentialkräfte von 1 nach 2:

$$W\Big|_1^2 = -\int_{\frac{2}{3}\frac{L}{r}}^{\frac{L}{r}} M_t \left(\varphi - \varphi_b\right) \, \mathrm{d}\varphi \quad = -M_t \left(\frac{\varphi^2}{2} - \varphi\varphi_b\right)\Big|_{\frac{2L}{3r}}^{\frac{L}{r}} = -M_t \frac{1L^2}{18r^2}$$

Arbeitssatz:

$$\begin{aligned}
&T_1 + U_1 + W\Big|_1^2 = T_2 + U_2 \\
&\frac{4}{3} gLm - M_t \frac{1L^2}{18r^2} = 0 - \frac{1}{6} Lmg \\
&M_t = 27mg\frac{r^2}{L}
\end{aligned}$$

# 3. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)




Ein Turm mit Aussichtsplattform wird durch einen starren Balken (Länge $L$, Masse $M = 3m$) und eine Punktmasse $m$ idealisiert. Die Biegesteifigkeit des Turms wird vereinfachend in einer Drehfeder $k$, die für $\varphi_1 = 0$ entspannt ist, am Auflagerpunkt $A$ konzentriert. Um Schwingungen infolge einer Windkraft $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ abzumildern, wird ein Schwingungstilger in Form eines Pendels mit masselosem Stab der Länge $l$ und Punktmasse $m_T = m/2$ vorgesehen. Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Bestimmen Sie die Beschleunigung des Tilgers (Punktmasse $m_T$) im $xy$-Koordinatensystem in Abhängigkeit von $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und linearisieren Sie diese für kleine Winkel, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen $|\varphi_i|, |\dot{\varphi}_i|, |\ddot{\varphi}_i| \ll 1$ für $i = 1, 2$.

b) Stellen Sie mit Hilfe der *synthetischen Methode* (Freischneiden) die linearisierten Bewegungsgleichung(en) des Systems auf.

c) Wie muss die Länge $l$ gewählt werden, damit der Aussichtsturm für eine gegebene Erregerfrequenz $\Omega$ in Ruhe ist (Schwingungstilgung)?

*Hinweis: Lösungen mit anderen Methoden als der synthetischen werden nicht gewertet.*

Gegeben: $g$, $m$, $M = 3m$, $m_T = m/2$, $L$, $l$, $k$, $F_0$, $\Omega$.

**Musterlösung - Aufgabe 3**

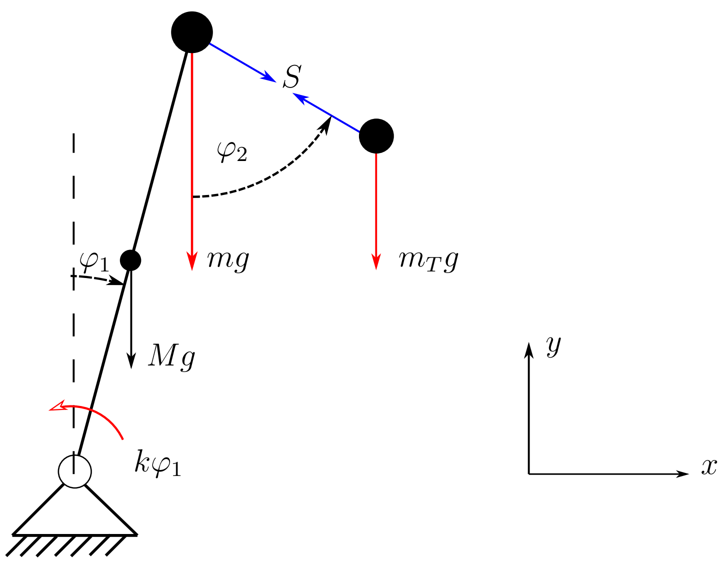
a)

$$
\begin{aligned}
x_T &= L\sin(\varphi_1) + l\sin(\varphi_2) \\
\dot{x}_T &= L\cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\
\ddot{x}_T &= L\cos(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 - L\sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + l\cos(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - l\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2 \\
\\
y_T &= L\cos(\varphi_1) - l\cos(\varphi_2) \\
\dot{y}_T &= -L\sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\
\ddot{y}_T &= -L\sin(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 - L\cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 + l\sin(\varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + l\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2^2
\end{aligned}
$$

Linearisierung:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_T &\approx L\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_2 \\
\ddot{y}_T &\approx 0
\end{aligned}
$$

b) Freischnitt:




Tilger:

$$
\begin{aligned}
\sum F_{iy} = m_T\ddot{y}_T \quad &\Leftrightarrow \quad S\cos(\varphi_2) - m_T g = m_T\ddot{y}_T \\
&\overset{|\varphi_2|\ll 1}{\Leftrightarrow} \quad S = m_T \cdot g \qquad (1) \\
\sum F_{ix} = m_T\ddot{x}_T \quad &\Leftrightarrow \quad S\sin(\varphi_2) = m_T\ddot{x}_T \\
&\underset{(1)}{\overset{|\varphi_2|\ll 1}{\Leftrightarrow}} \quad \boxed{\ddot{\varphi}_2 + \frac{L}{l}\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_2 = 0} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Turm (mittels Drallsatzes um Lager $A$):

$$
\Theta_A = \frac{M \cdot L^2}{3} + mL^2 = 2mL^2
$$

$$
\begin{aligned}
& & \sum M_A &= \Theta_A \ddot{\varphi}_1 \\
\Leftrightarrow & & 2mL^2\ddot{\varphi}_1 &= Mg\frac{L}{2}\sin(\varphi_1) + mgL\sin(\varphi_1) - k\varphi_1 - S\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1)L \\
& & &\quad + S\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1)L + F(t)\cdot L\cos(\varphi_1) \\
\overset{|\varphi_i|\ll 1}{\Leftrightarrow} & & 2mL^2\ddot{\varphi}_1 &= \left(\frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) mgL\varphi_1 - k\varphi_1 + \frac{L}{2}mg\varphi_2 + F(t)L \\
\Leftrightarrow & & &\boxed{\ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{k}{2mL^2} - \frac{3g}{2L}\right)\varphi_1 - \frac{g}{4L}\varphi_2 = \frac{F(t)}{2mL}} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

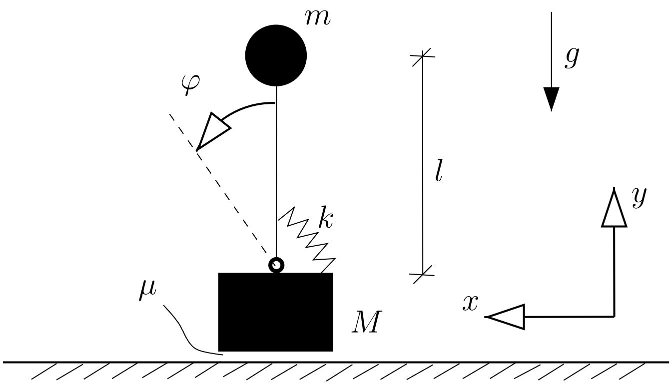
c) Keine Schwingung des Turms: $\varphi_1 = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi}_1 = 0$
Einsetzen in (3):

$$
\varphi_2 = -2\frac{F(t)}{mg} = -\frac{-2F_0}{mg}\cos(\Omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\varphi}_2 = \frac{2F_0}{mg}\Omega^2\cos(\Omega t)
$$

Einsetzen in (2):

$$
\frac{2F_0}{mg}\cos(\Omega t)\left(\Omega^2 - \frac{g}{l}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{l = \frac{g}{\Omega^2}}
$$

# 4. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)




Das skizzierte System besteht aus zwei Massepunkten ($M$ und $m$), die mit einer masselosen Stange (Länge $l$) und einer Drehfeder (Steifigkeit $k$) verbunden sind. Der Reibungskoeffizient zwischen Unterlage und Masse $M$ beträgt $\mu$ (Coulomb'sche Gleitreibung) und es wirkt die Gravitation $g$. Es kann angenommen werden, dass die Masse $M$ ständig im Kontakt zum Boden ist (kein Abheben) und eine permanente Gleitbewegung in positiver $x$-Richtung vorherrscht ($\dot{x}_M(t) > 0$). Die Masse $M$ kann außerdem nicht kippen.

a) Stellen Sie die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_m(q_1, q_2)$ und $\boldsymbol{r}_M(q_1, q_2)$ auf. Nutzen Sie als generalisierte Koordinaten $q_1 = x$ und $q_2 = \varphi$.

b) Bestimmen Sie die generalisierten Nichtpotentialkräfte $Q_i^*$ $(i = 1, 2)$. Für die Reibungskraft $R = \mu N$ darf die Normalkraft für das ruhende System eingesetzt werden.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in $q_1$ und $q_2$.

d) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Winkel $|\varphi| \ll 1$ und Geschwindigkeiten $|\dot{\varphi}|, |\dot{x}| \ll 1$.

e) Welcher Bedingung muss $k$ genügen, damit die Bewegung der Masse $m$ stabil ist?
*Hinweis: Formen Sie ggf. die Bewegungsgleichungen so um, dass Sie eine Schwingungsgleichung in der Form $\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = F$ erhalten.*

*Hinweis: Andere Methoden als die Methode nach Lagrange werden nicht gewertet.*

Gegeben: $g$, $m$, $M$, $k$, $\mu$, $l$.

**Musterlösung - Aufgabe 4**

a)

$$r_M = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r}_M = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$r_m = \begin{bmatrix} x + l\sin(\varphi) \\ l\cos(\varphi) \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r}_m = \begin{bmatrix} \dot{x} + l\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ -l\sin(\varphi)\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

b) Reibungskraft:

Normalkraft in der statischen Ruhelage $\Rightarrow N = (m+M)g$
Reibungskraft $R = \mu N$

Generalisierte Kräfte:

$$Q_1^* = \begin{bmatrix} -\mu g\,(m+M) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = -\mu g\,(M+m)$$
$$Q_2^* = \begin{bmatrix} -\mu g\,(m+M) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

c) Energien:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\cos(\varphi)\dot{x}\dot{\varphi}\right)$$
$$V = \frac{1}{2}k\varphi^2 + mgl\cos(\varphi)$$

Ableitungen für Lagrange-Formalismus:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + m\dot{x} + ml\cos(\varphi)\dot{\varphi}\right) \\
&= (M+m)\ddot{x} + ml\left(-\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi)\ddot{\varphi}\right) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi} + ml\cos(\varphi)\dot{x}\right) \\
&= ml^2\ddot{\varphi} + ml\left(-\sin(\varphi)\dot{x}\dot{\varphi} + \cos(\varphi)\ddot{x}\right) \\
\frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -ml\sin(\varphi)\dot{x}\dot{\varphi} \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= k\varphi - mgl\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen mit Methode nach Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^*$$

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} + ml\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - ml\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 &= -\mu g(m+M)\\ ml^2\ddot{\varphi} + ml\cos(\varphi)\ddot{x} + k\varphi - mgl\sin(\varphi) &= 0\end{aligned}$$

d) Linearisierte Bewegunsgleichungen:

$$\begin{aligned}(1):&\quad (m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} = -\mu g(m+M)\\ (2):&\quad ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x} + (k-mgl)\varphi = 0\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}&\text{aus (1): } \ddot{x} = -\mu g - \frac{ml}{m+M}\ddot{\varphi}\\ &\text{aus (2): } ml\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)\ddot{\varphi} + \left(\frac{k}{l} - mg\right)\varphi = \mu g m\\ &\Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{m+M}{M}\left(\frac{k}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)}_{\omega^2}\varphi = \frac{\mu g}{l}\frac{m+M}{M}\end{aligned}$$

Das System ist stabil, wenn $\omega^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{k > mgl}$