Modulprüfung

Statik starrer Körper

10. April 2021

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

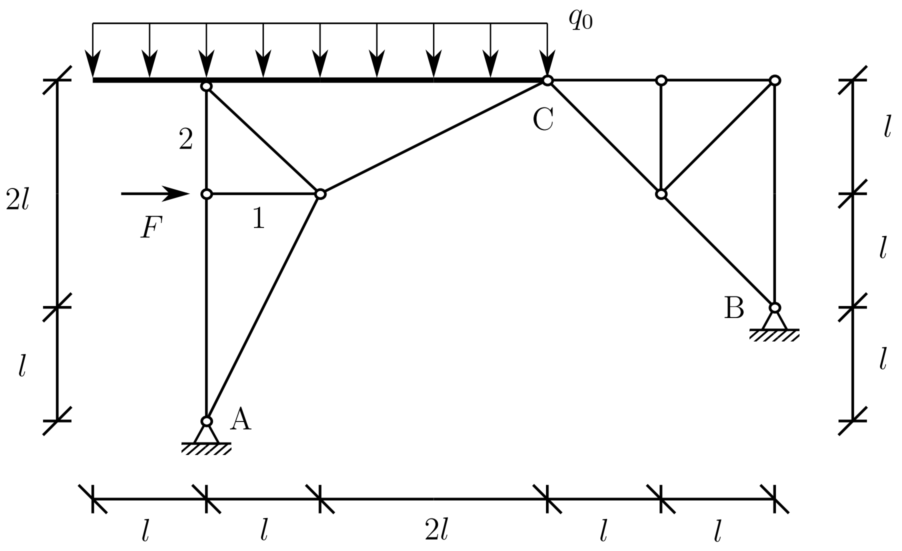
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	12	15	11	11	49
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Tragwerk wird durch eine konstante Streckenlast q_0 und eine Last F belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich des Aufbaus und der statischen Bestimmtheit.

b) Berechnen Sie sämtliche Lagerreaktionen.

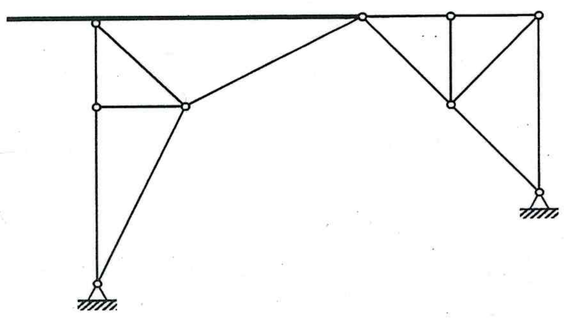
c) Geben Sie alle Nullstäbe an (mit Begründung).

d) Ermitteln Sie die Stabkräfte in den Stäben 1 und 2.

Gegeben: F, q_0, l

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Statische Bestimmtheit



Dreigelenkbogen aus Teilfachwerken mit

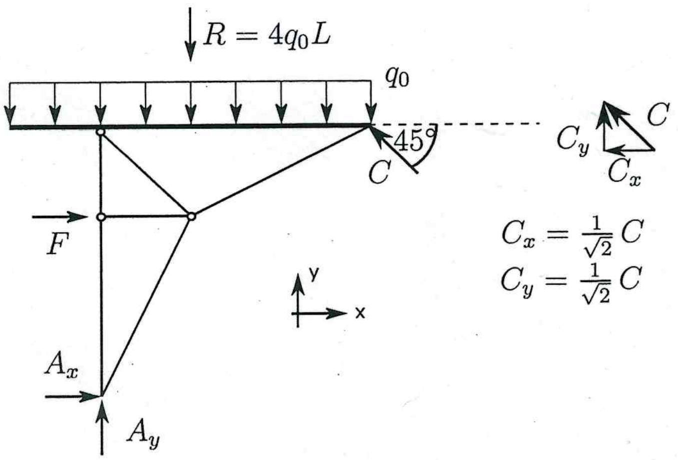
$$\text{Knoten}: \quad k = 9$$
$$\text{Stäbe}: \quad s = 14$$
$$\text{Lagerreaktionen}: \quad a = 4$$

$$\rightarrow \quad 2\,k = s + a$$
$$2 \cdot 9 = 14 + 4$$
$$18 = 18 \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ statisch bestimmt

b) Lagerreaktionen

Freischnitt der Lager: rechtes System unbelastet $\rightarrow$ Pendelstütze



$$C_x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}C$$
$$C_y = \tfrac{1}{\sqrt{2}}C$$

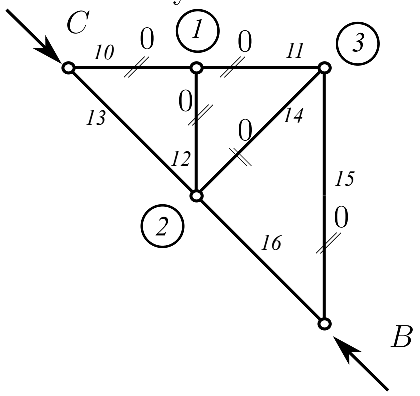
$$\sum M_i^{(A)} = 0: \quad -F \cdot 2L - 4q_0L \cdot L + C \cdot 3L \cdot \sqrt{2} = 0 \quad \rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(F + 2q_0L\right)$$

$$\sum F_{ix} = 0: \quad F + A_x - C_x = 0 \quad \rightarrow A_x = -\frac{2}{3}\left(F - q_0L\right)$$

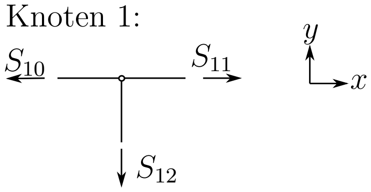
$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - R + C_y = 0 \quad \rightarrow A_y = \frac{1}{3}\left(10q_0L - F\right)$$

c) Nullstäbe

rechtes Teilsystem

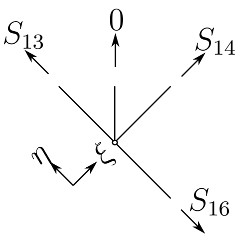


Knoten 1:



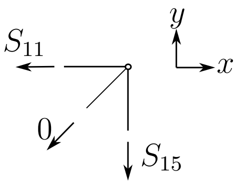
$$\sum F_{iy} = 0 \qquad \rightarrow S_{12} = 0$$
$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \rightarrow S_{10} = S_{11}$$

Knoten 2:



$$\sum F_{i\xi} = 0 \qquad \rightarrow S_{14} = 0$$
$$\sum F_{i\eta} = 0 \qquad \rightarrow S_{13} = S_{16}$$

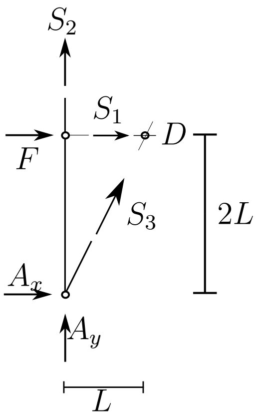
Knoten 3:



$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \rightarrow S_{11} = 0 \qquad \rightarrow S_{10} = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0 \qquad \rightarrow S_{15} = 0$$

d) Stabkräfte 1 und 2

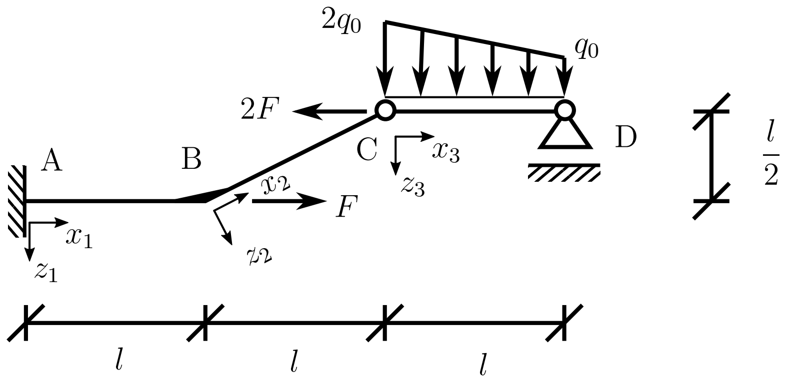
Ritterschnitt:



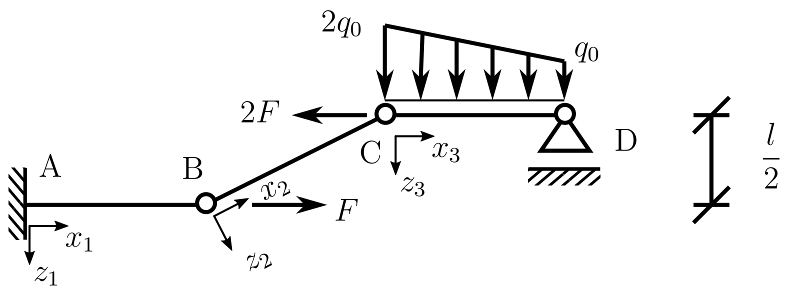
$$\sum M_i^{(A)} = 0: \quad F \cdot 2L + S_1 \cdot 2L = 0 \qquad \rightarrow S_1 = -F$$
$$\sum M_i^{(D)} = 0: \quad S_2 \cdot L + A_y \cdot L - A_x \cdot 2L = 0$$
$$\rightarrow S_2 = -\left(F + 2q_0 L\right)$$

2. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)

1



2



Gegeben sind zwei unterschiedliche Tragwerke 1 und 2, die jeweils durch eine Streckenlast sowie zwei Einzelkräfte belastet werden.

a) Bestimmen Sie, bei welchem der Tragwerke die notwendige und die hinreichende Bedingungen für die statische Bestimmtheit erfüllt sind.

Für das von Ihnen in Aufgabenteil a) als statisch bestimmt identifizierte Tragwerk lösen Sie folgende Aufgaben:

b) Bestimmen Sie alle Auflagerreaktionen.

c) Berechnen Sie den Momenten- und den Querkraftverlauf im Bereich C-D durch Integration.

d) Skizzieren Sie die Querkraft- und Momentenverläufe für das gesamte System unter Angabe der Ordinaten an den Bereichsgrenzen. Berücksichtigen Sie hierfür die gegeben lokalen Koordinatensysteme.

Gegeben: $l,\ q_0,\ F = \frac{2}{3}q_0 l$

Musterlösung - Aufgabe 2

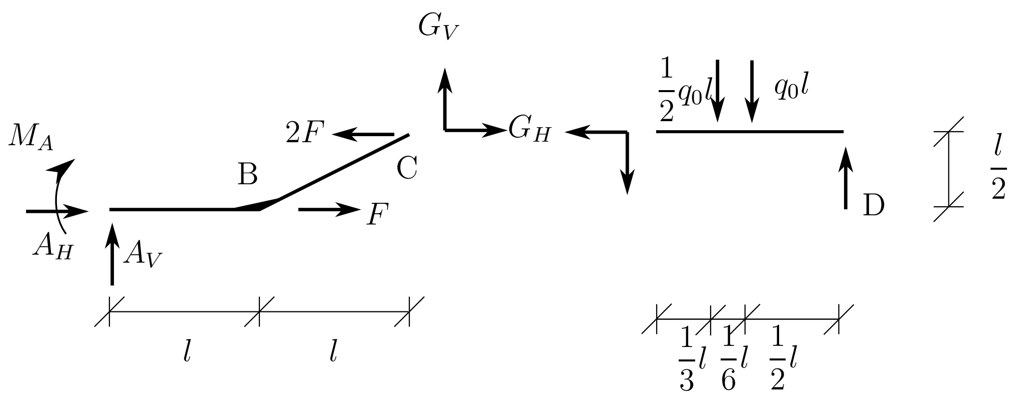
a) Statische Bestimmheit der Tragwerke

Tragwerk 1:
Notwendige Bedingung: $a = 4,\ k = 2,\ g = 2 \quad \rightarrow \quad a + g = 6 = 3 \cdot 2 = 3k$
Hinreichende Bedingung: Das Tragwerk besteht aus einem Kragarm mit gelenkig angeschlossenem Balken. Die Wirkungslinie des einwertigen Auflagers geht dabei nicht durch das Gelenk. Damit ist das Tragwerk nicht kinematisch.
$\Rightarrow$ Tragwerk ist statisch bestimmt.

Tragwerk 2:
Notwendige Bedingung: $a = 4,\ k = 3,\ g = 4, \quad \rightarrow \quad a + g = 8 \neq 3 \cdot 3 = 3k$
Hinreichende Bedingung: Das Tragwerk ist einfach statisch unterbestimmt. Damit ist das Tragwerk kinematisch.
$\Rightarrow$ Tragwerk ist nicht statisch bestimmt

$\Rightarrow$ weitere Berechnung wird an Tragwerk 1 durchgeführt.

b) Lagerreaktionen



Rechtes Teilsystem:

$$\sum M^C = Dl - q_0 l \cdot \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}q_0 l \cdot \frac{1}{3}l = 0 \quad \rightarrow D = \frac{2}{3}q_0 l$$

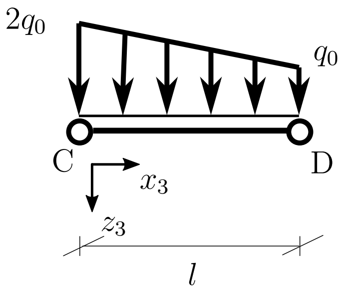
Gesamtsystem:

$$\sum F_{iV} = A_V - \frac{1}{2}q_0 l - q_0 l + D = 0 \qquad \rightarrow A_V = \frac{5}{6}ql$$

$$\sum F_{iH} = A_H + F - 2F = 0 \qquad \rightarrow A_H = F$$

$$\sum M^A = -M_A + 2F \cdot \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}q_0 l \cdot \frac{7}{3}l - q_0 l \cdot \frac{5}{2}l + D \cdot 3l = 0 \quad \rightarrow M_A = -q_0 l^2$$

c) Momenten- und Querkraftverlauf im Bereich C-D:



$$
\begin{aligned}
q(x_3) &= -\frac{q_0}{l}x_3 + 2q_0 \\
\overset{\text{Int.}}{\rightarrow}\ Q(x_3) &= \frac{q_0}{2l}x_3^2 - 2q_0x_3 + c_1 \\
\overset{\text{Int.}}{\rightarrow}\ M(x_3) &= \frac{q_0}{6l}x_3^3 - q_0x_3^2 + c_1x_3 + c_2
\end{aligned}
$$

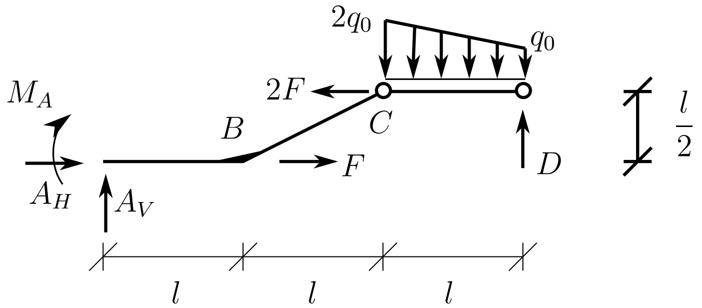
Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
M(x_3 = 0) = 0 \quad &\rightarrow \quad c_2 = 0 \\
M(x_3 = l) = 0 \quad &\rightarrow \quad \frac{q_0l^2}{6} - q_0l^2 + c_1l = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{5}{6}q_0l
\end{aligned}
$$

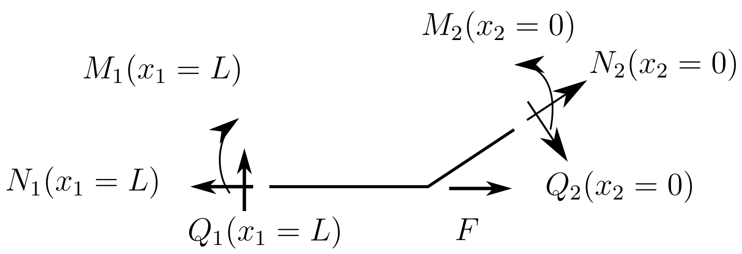
Lösung:

$$
\begin{aligned}
Q(x_3) &= \frac{q_0}{2l}x_3^2 - 2q_0x_3 + \frac{5}{6}q_0l \\
M(x_3) &= \frac{q_0}{6l}x_3^3 - q_0x_3^2 + \frac{5}{6}q_0lx_3
\end{aligned}
$$

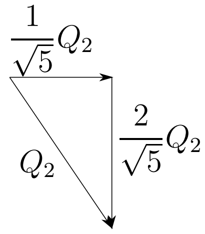
d) Skizze der Verläufe im gesamten Gebiet:



Freischnitt der Ecke B

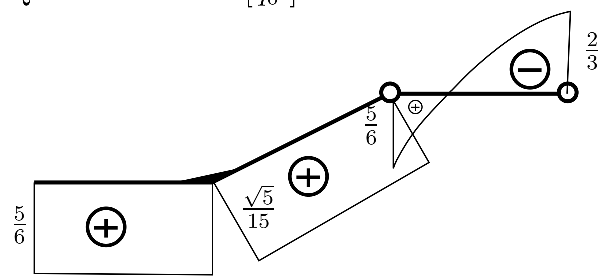


Zerlegung von Q_2:

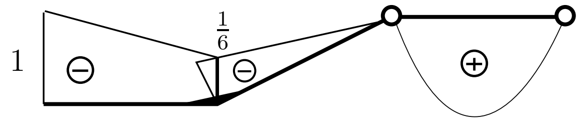


$$
\begin{aligned}
x_1 = 0: \qquad & Q_1(x_1 = 0) = A_V = \frac{5}{6} q_0 l \\
& M_1(x_1 = 0) = M_A = -q_0 l^2 \\
x_1 = l: \qquad & M_1(x_1 = l) = M_A + A_v l = -\frac{1}{6} q_0 l^2 \\
x_2 = 0: \qquad & Q_2(x_2 = 0) = Q_1(x_1 = L) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + N_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - F \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{15} q_0 L
\end{aligned}
$$

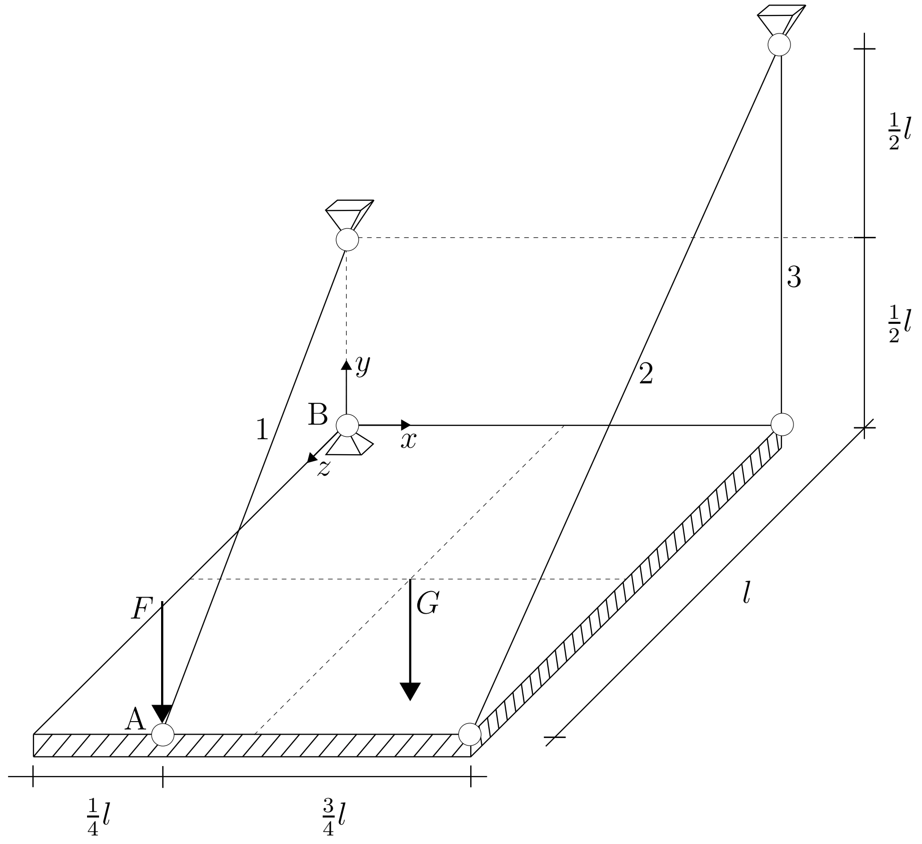
Querkraftverlauf $[q_0 l]$:



Momentenverlauf $[q_0 l^2]$:



3. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Vordach wird durch drei Seile abgespannt und ist im Punkt B gelenkig gelagert. Das Vordach besteht aus einer quadratischen, homogenen Platte und wird durch sein Eigengewicht G sowie einer am Knoten A angreifenden Gewichtskraft F eines Blumentopfes belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

b) Ermitteln Sie die Seilkräfte in den Seilen 1, 2 und 3.

Gegeben: l, F, G

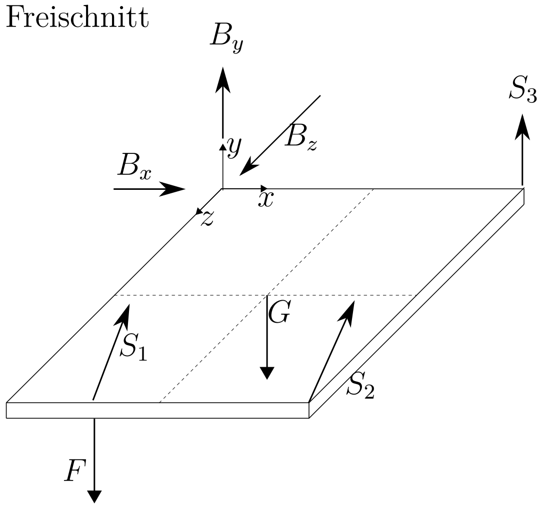
Musterlösung - Aufgabe 3

a) statische Bestimmtheit

- 1 Starrer Körper: 6 Freiheitsgrade
- 1 Festlager: 3 Lagerreaktionen
- Zugseile $\widehat{=}$ Pendelstützen, 3 Zugseile: 3 Lagerreaktionen
- Abzählkriterium: $6n = 6 \cdot 1 = a + v = 6 + 0$ ✓ & Tragwerk nicht kinematisch gelagert

b) Seilkräfte

- Freischnitt



- Kräftezerlegung

S_1: $\quad l_1 = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{16} + \frac{l^2}{4}} = l\sqrt{\frac{21}{16}} = \sqrt{21}\frac{l}{4}$

$$\boldsymbol{S_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} S_1, \qquad \boldsymbol{r_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} l, \qquad \boldsymbol{M^B_{S1}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{S_1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{21}} \end{bmatrix} lS_1$$

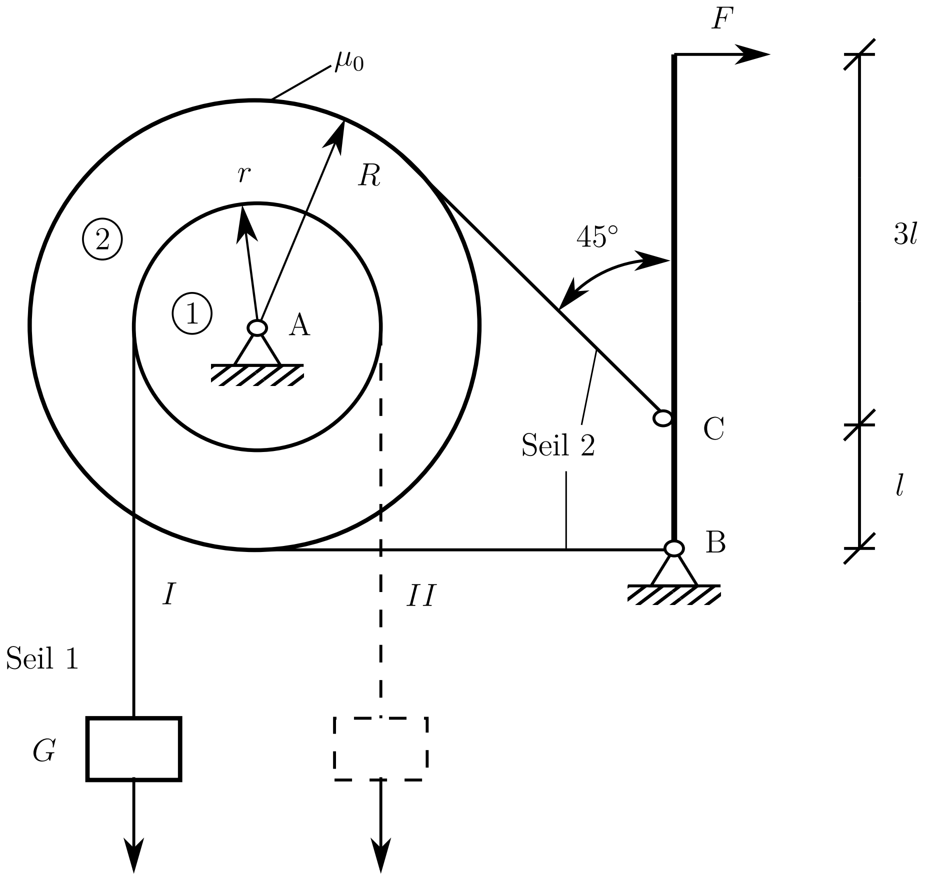
- Momentengleichgewicht

$$\sum M_y^B = 0: \qquad \frac{S_2}{\sqrt{2}} l = 0 \qquad \rightarrow S_2 = 0$$

$$\sum M_x^B = 0: \qquad -\frac{2}{\sqrt{21}} lS_1 - \frac{S_2}{\sqrt{2}} l + \frac{Gl}{2} + Fl = 0 \qquad \rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{21}}{2}\left(\frac{G}{2} + F\right)$$

$$\sum M_z^B = 0: \qquad \frac{1}{2\sqrt{21}} lS_1 + \frac{S_2}{\sqrt{2}} l + S_3 l - F\frac{l}{4} - G\frac{l}{2} = 0 \qquad \rightarrow S_3 = \frac{3}{8}G$$

4. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



Die dargestellte Anordnung dient dem Abbremsen der Last G bei ihrer Abwärtsbewegung. Die Last G ist an einem Seil (Seil 1) befestigt, welches um die Rolle 1 (Radius r) nach Anordnung I oder II gewickelt werden kann. Die Rolle 1 ist fest mit der Rolle 2 (Radius R) verbunden, wobei beide Rollen in A gelenkig gelagert sind. Die Bremswirkung wird durch ein rauhes Seil (Seil 2) erzeugt, welches um die Rolle 2 geschlungen ist. Zwischen Seil 2 und Rolle 2 herrscht ein Haftungskoeffizient μ_0. Folgende Fragen sind zu beantworten:

a) Wie groß ist die Seilkraft im Seil 2 bei C in Abhängigkeit von der Bremskraft F?

b) Wie groß ist der Umschlingungswinkel α?

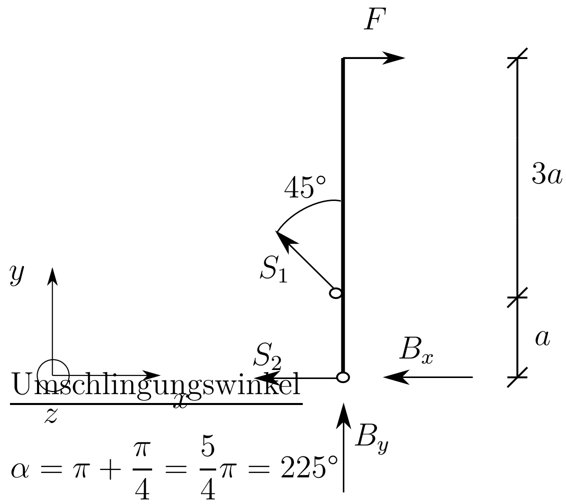
c) Wie groß muss bei Anordnung I die Kraft F sein, damit die Last G gerade noch in Ruhe ist?

d) Wie verändert sich die Bremskraft F bei Anordnung II gegenüber I?

Gegeben: G, r, R, μ_0, l

Musterlösung - Aufgabe 4

a) <u>Freischnitt des Bremshebels</u>



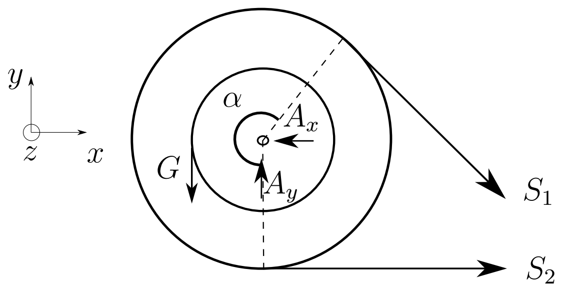
$$\sum M_z^B = 0: \qquad S_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a - F \cdot 4a = 0$$

$$\rightarrow \quad S_1 = 4\sqrt{2}F \qquad (1)$$

b) <u>Umschlingungswinkel</u>

$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi = 225°$$

c) <u>Freischnitt der Rollen: Anordnung I</u>



$$\sum M_z^A = 0: \quad S_2 \cdot R + G \cdot r - S_1 \cdot R = 0 \qquad (2)$$

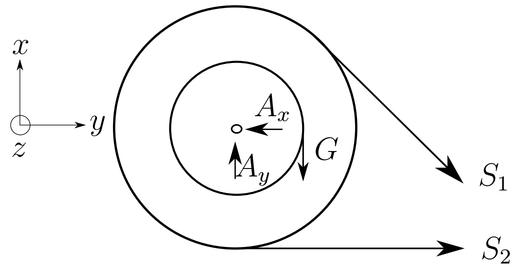
G erzeugt ein linksdrehendes Moment $\rightarrow S_1 > S_2$

Grenzfall der Haftung: $\quad S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \cdot \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu\alpha} \qquad (3)$

(3) eingesetzt in (2): $\quad S_1 \cdot e^{-\mu\alpha} \cdot R + G \cdot r - S_1 \cdot R = 0 \quad \rightarrow S_1 = \frac{r}{R} \cdot \frac{G}{1-e^{-\mu\alpha}}$

eingesetzt in (1): $\quad F = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{G}{1-e^{-\mu\alpha}}$

d) Freischnitt der Rollen: Anordnung II



$$\sum M_z^A = 0: \quad S_2 \cdot R - G \cdot r - S_1 \cdot R = 0 \qquad (4)$$

G erzeugt ein rechtsdrehendes Moment $\rightarrow S_1 < S_2$

Grenzfall der Haftung: $S_2 = S_1 \cdot e^{\mu\alpha}$ (5)

(5) eingesetzt in (4): $S_1 \cdot e^{\mu\alpha} \cdot R - G \cdot r - S_1 \cdot R = 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = \frac{r}{R} \cdot \frac{G}{e^{\mu\alpha}-1}$

eingesetzt in (1): $F = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{G}{e^{\mu\alpha}-1}$

Bei Anordnung II wird die Bremskraft kleiner als bei Anordnung I.