Prüfung in

Baudynamik

15. Februar 2022

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				
Korrektur				

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

a) Wie ist das logarithmische Dekrement einer gedämpften harmonischen Schwingung definiert? Welche Näherung gibt es im Bauwesen? Zu welchem Zweck kann das logarithmische Dekrement experimentell verwendet werden?

b) Ein System mit Windlast v_w und Koordinate x unterliegt der Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} + \left[\tilde{d} - f(v_\mathrm{w})\right]\,\dot{x} + k\,x = 0\ ,$$

wobei die Parameter k, m und $\tilde{d} > 0$ gegeben sind.

b1) Bestimmen Sie das Dämpfungsmaß D.

b2) Was muss für die Funktion $f(v_\mathrm{w})$ gelten, damit keine Anfachung der Schwingung erfolgt?

c) Sind die Eigenvektoren, die die Eigenschwingungen eines dynamischen Systems charakterisieren, eindeutig festgelegt? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

d) Wie ist die Rayleigh-Dissipationsfunktion definiert? Wie geht sie in die Energiebilanz eines frei schwingenden dynamischen Systems ein?

e) Die Dämpfungsmatrix eines frei schwingenden Systems mit zwei Freiheitsgraden hat die Form

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

mit $d > 0$. Ist das System vollständig gedämpft? Ist durchdringende Dämpfung möglich? Begründen Sie ihre Antwort kurz. Beschreiben Sie den Effekt der durchdringenden Dämpfung kurz.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Das logarithmische Dekrement ist definiert als

$$\delta = \ln\left(\frac{x_{\mathrm{n}}}{x_{\mathrm{n+1}}}\right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \ .$$

Alternative Lösung bei Betrachtung von N Zyklen:

$$\delta = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{x_{\mathrm{n}}}{x_{\mathrm{n+N}}}\right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \ .$$

Im Bauwesen gilt in der Regel $D \ll 1$, so dass dann näherungsweise gilt:

$$\delta \approx 2\pi D$$

Durch Ausschwingversuche können die Werte x_{i} bestimmt werden und somit eine Näherung für das Dämpfungsmaß bestimmt werden.

b) Durch Ablesen in der Normalform folgt

$$D = \frac{\tilde{d} - f(v_{\mathrm{w}})}{2m\omega_0}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Anfachung erfolgt für $D < 0$, d.h. es gibt keine Anfachung falls $D \geq 0$ bzw.

$$f(v_{\mathrm{w}}) \leq d \ .$$

c) Nein. Je Eigenvektor eines dynamischen Systems kann ein Wert frei gewählt werden. Die Richtung der Eigenvektoren ist also eindeutig während ihre Norm unbestimmt bleibt.

Die Ursache liegt in der Bedingung zur Bestimmung der Eigenwerte. Das Verschwinden der Determinante der Koeffizientenmatrix deutet einen Rangabfall an.

Alternative Begründung:

Die Gleichung des Eigenwertproblems

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

kann mit skalaren Werten durchmultipliziert werden, d.h. auch Vielfache von Eigenvektoren ($\lambda\boldsymbol{v}$) sind Eigenvektoren des Systems.

d) Die Rayleigh-Dissipationsfunktion ist definiert als

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}$$

wobei $\boldsymbol{D}$ die symmetrische Dämpfungsmatrix ist. Für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie gilt

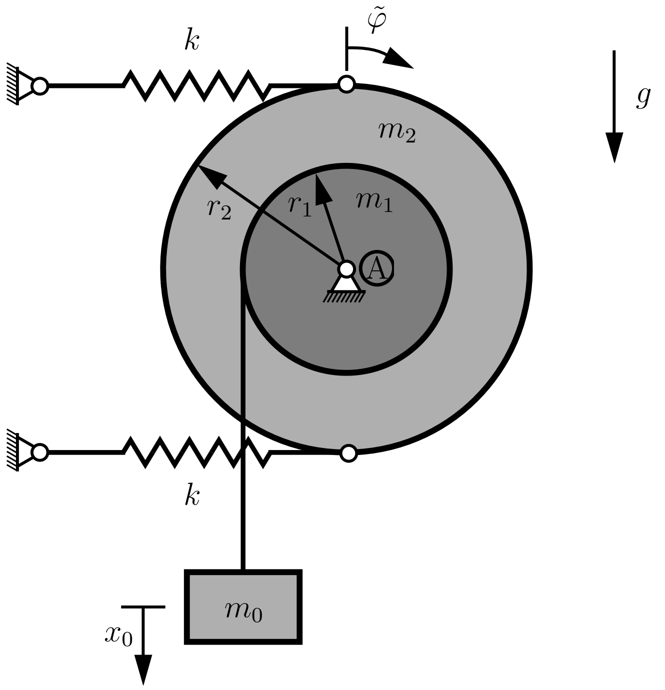
$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}) = -\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= -2\,\mathcal{D}\end{aligned}$$

e) Da $\boldsymbol{D}$ nicht positiv definit ist ($\mathcal{D} > 0$ für beliebige $\dot{\boldsymbol{q}} \neq \mathbf{0}$ gilt nicht), liegt keine vollständige Dämpfung vor. Es gibt einen Nulleigenwert.

Stattdessen ist $\boldsymbol{D}$ positiv semidefinit (es gilt $\mathcal{D} \geq 0$ für beliebige $\dot{\boldsymbol{q}} \neq \mathbf{0}$), so dass durchdringende Dämpfung möglich ist.

Durchdringende Dämpfung bedeutet, dass sämtliche Schwingungen gedämpft werden, auch wenn nicht jeder FHG einzeln gedämpft ist.

2. Aufgabe: (ca. 40 % der Gesamtpunkte)



Zwei homogene Kreisscheiben (Radius r_1 und r_2, Massen m_1 und m_2) sind fest miteinander verbunden und reibungsfrei drehbar in Punkt A gelagert. An der großen Scheibe sind zwei Federn (Federsteifigkeit k) so angeschlossen, dass sich diese nur horizontal verlängern oder verkürzen können. An der kleinen Scheibe hängt eine Masse m_0 an einem masselosen Seil, das auf der kleinen Kreisscheibe aufgewickelt ist.

Gegeben:
$m_1 = 198\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 198\,\mathrm{kg}$; $m_0 = 10\,\mathrm{kg}$; $r_1 = 0,01\,\mathrm{m}$; $r_2 = 0,1\,\mathrm{m}$; $k = 20.000 \cdot \pi^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung(en) des Systems für kleine Auslenkungen $\tilde{\varphi}$ mit Hilfe der synthetischen Methode nach d'Alembert.

c) Bestimmen Sie die statische Ruhelage des Systems. Ist die Annahme kleiner Winkel unter den gegebenen Parametern (m_0, k, r_1, r_2) gerechtfertigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Führen Sie eine Koordinatentransformation $\tilde{\varphi} \to \varphi$ in die Koordinate φ um die statische Ruhelage durch und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz(en) des Systems.

Bitte gehen Sie im Folgenden von der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_0^2 \varphi(t) = 0$$

aus. Die Eigenkreisfrequenz ist als $\omega_0 = 20\pi \, \frac{1}{\mathrm{s}}$ gegeben.

e) Transformieren Sie die Bewegungsgleichung in die Eigenzeit und normieren Sie die Differentialgleichung.

f) Bestimmen Sie die Lösung $\varphi(\tau)$ der Bewegungsgleichung in Eigenzeit für die Anfangsbedingungen $\varphi(\tau = 0) = \varphi_0$ und $\varphi'(\tau = 0) = \varphi_0'$.

g) Ermitteln Sie die Periodendauer sowie die Eigenfrequenz f_0 des Systems.

h) Transformieren Sie Ihre in f) ermittelte Lösung zurück in den physikalischen Zeitbereich. Bestimmen Sie anschließend alle Koeffizienten der Fourierreihe der Lösungsfunktion $\varphi(t)$. Stellen Sie außerdem das einseitige Amplitudenspektrum im Bereich $f \in [0,\, 21]$ Hz in Abhängigkeit der Frequenz f grafisch dar.

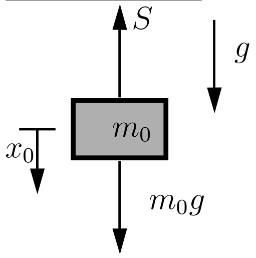
Musterlösung - Aufgabe 2

a) Anzahl Freiheitsgrade

$$x_0(t) = -r_1 \sin(\tilde{\varphi}(t)) = x_0(\tilde{\varphi}(t)) \rightarrow 1\text{Freiheitsgrad}$$

b) Bewegungsgleichung (d'Alembert)

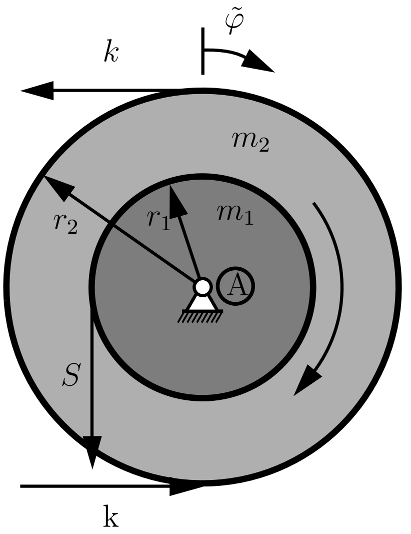
Freischnitt m_0



Schwerpunktsatz

$$m_0 \ddot{x}_0 = -S + m_0 g$$
$$\Leftrightarrow S = -m_0 \ddot{x}_0 + m_0 g$$

Freischnitt der Kreisscheiben



Kinematik, $x_0(\tilde{\varphi}(t))$

$$x_0(t) = -r_1 \tilde{\varphi}(t)$$
$$\dot{x}_0(t) = -r_1 \dot{\tilde{\varphi}}(t)$$
$$\ddot{x}_0(t) = -r_1 \ddot{\tilde{\varphi}}(t)$$

Kinematik, $x(\tilde{\varphi}(t))$

$$x(t) = r_2 \tilde{\varphi}(t)$$
$$\dot{x}(t) = r_2 \dot{\tilde{\varphi}}(t)$$
$$\ddot{x}(t) = r_2 \ddot{\tilde{\varphi}}(t)$$

Massenträgheitsmoment der Kreisscheiben

$$\Theta_S = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

Drallsatz

$$\begin{aligned}
\Theta_S \ddot{\tilde{\varphi}} &= -2kxr_2 - Sr_1 \\
&= -2kr_2^2 \tilde{\varphi} - (-m_0 \ddot{x}_0 + m_0 g) r_1 \\
&= -2kr_2^2 \tilde{\varphi} - m_0 r_1^2 \ddot{\tilde{\varphi}} - m_0 g r_1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\Theta_S + m_0 r_1^2) \ddot{\tilde{\varphi}} + 2kr_2^2 \tilde{\varphi} = -m_0 g r_1$$

c) Statische Ruhelage

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = 0 \rightarrow \tilde{\varphi}_S = -\frac{m_0 g r_1}{2kr_2^2} = -2,4849 \cdot 10^{-4}$$

$\Rightarrow |\tilde{\varphi}_S| << 1 \rightarrow$ Die Annahme kleiner Winkel ist gerechtfertigt.

d) Koordinatentransformation

Kinematik

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \tilde{\varphi} + \frac{m_0 g r_1}{2kr_2^2} \\
\dot{\varphi} &= \dot{\tilde{\varphi}} \\
\ddot{\varphi} &= \ddot{\tilde{\varphi}}
\end{aligned}
$$

Einsetzen

$$
\begin{aligned}
& (\Theta_S + m_0 r_1^2)\ddot{\varphi} + 2kr_2^2\varphi = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \ddot{\varphi} + \frac{2kr_2^2}{\Theta_S + m_0 r_1^2}\varphi = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0
\end{aligned}
$$

Eigenkreisfrequenz

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{2kr_2^2}{\Theta_S + m_0 r_1^2}} = 20\pi[Hz]
$$

e) Eigenzeit

Transformationsvorschrift

$$
\begin{aligned}
\tau = \omega_0 t \quad & \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(\frac{\tau}{\omega_0}) \\
& \dot{\varphi}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\frac{\tau}{\omega_0}) = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\varphi(\frac{\tau}{\omega_0}) = \omega_0\varphi'(\tau) \\
& \ddot{\varphi}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi(\frac{\tau}{\omega_0}) = ... = \omega_0^2\varphi''(\tau)
\end{aligned}
$$

Einsetzen

$$
\begin{aligned}
& \omega_0^2\varphi''(\tau) + \omega_0^2\varphi(\tau) = 0 \\
\Leftrightarrow & \varphi''(\tau) + \varphi(\tau) = 0
\end{aligned}
$$

f) Lösung für beliebige Anfangsbedingungen

$$
\varphi(\tau) = \varphi(\tau)_h = a\cos(\tau) + b\sin(\tau)
$$

Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
\varphi(\tau = 0) &= a = \varphi_0 \\
\varphi'(\tau = 0) &= b = \varphi_0'
\end{aligned}
$$

Spezielle Lösung

$$
\varphi(\tau) = \varphi_0\cos(\tau) + \varphi_0'\sin(\tau)
$$

g) Periodenlänge und Eigenfrequenz

Periodenlänge

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10}s$$

Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = 10[Hz]$$

h) Fourierreihe

Rücktransformation

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0}\varphi_0' \sin(\omega_0 t)$$

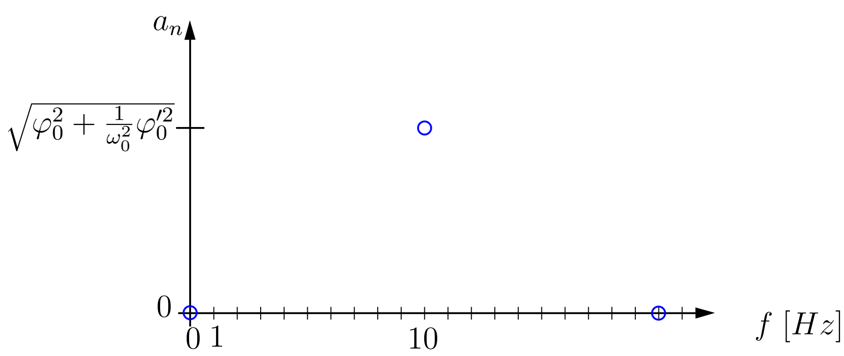
Fourierkoeffizienten

$$c_0 = 0$$
$$c_n = \begin{cases} \varphi_0 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$s_n = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0}\varphi_0' & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Amplitude

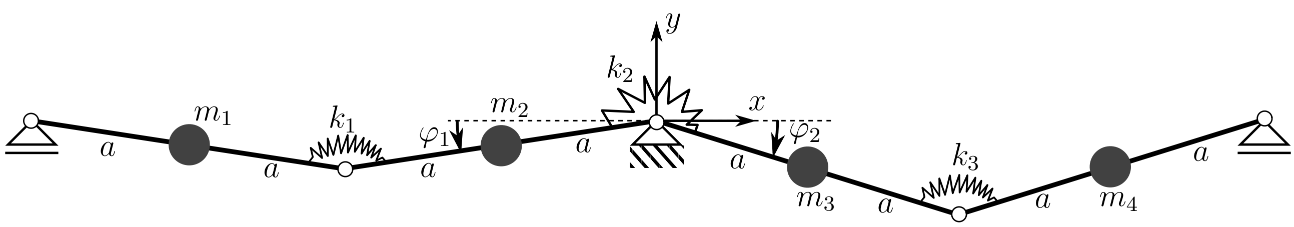
$$a_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2} = \sqrt{\varphi_0^2 + (\frac{\varphi_0'}{\omega_0})^2} \qquad a_n = 0 \text{ sonst}$$

Amplitudenspektrum



3. Aufgabe: (ca. 40 % der Gesamtpunkte)

Das Modell eines Zweifeldbalkens besteht aus vier gleich schweren Balken der Länge $2a$, deren Massen m_i vereinfachend im jeweiligen Schwerpunkt konzentriert sind, und drei Drehfedern (k_1, k_2, k_3). Das mittlere Auflager ist zweiwertig und lässt beidseitige Rotationen zu, während die beiden äußeren Auflager einwertig sind und nur die Vertikalverschiebung behindern. Als Koordinaten werden die beiden Neigungswinkel φ_1 und φ_2 der Balken im mittleren Gelenk gewählt. Das Bild unten zeigt die allgemein ausgelenkte Lage. Die Erdbeschleunigung soll vernachlässigt werden. Für die Aufgabenteile b) bis f) nehme man kleine Winkel an, das heißt $|\varphi_1| \ll 1$ und $|\varphi_2| \ll 1$.



Gegeben: k_1, k_2, k_3, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, a

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben.

a) Bestimmen Sie die allgemeinen Geschwindigkeitsvektoren der Massen m_2 und m_3 im angegebenen x-y-Koordinatensystem in Abhängigkeit der Winkel φ_i ohne Kleinwinkelnäherung. Bestimmen Sie die kinetische Energien der Massen m_2 und m_3.

b) Es soll angenommen werden, dass die kinetische Energie der Masse m_1 gleich der von Masse m_2 ist. Dasselbe gilt analog für die Massen m_3 und m_4. Bestimmen Sie die kinetische Energie des ganzen Systems in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2.

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems unter Berücksichtigung der Kleinwinkelnäherung mithilfe der kinetischen und potentiellen Energie (entsprechend der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art).
Andere Lösungswege werden nicht gewertet.

d) Welche Aussagen lassen sich über die Bewegungsgleichungen machen für folgende Fälle der Drehfeder k_2 am mittleren Gelenk?

  d1) $k_2 = 0$

  d2) $k_2 \to \infty$

Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass $k_1 = k_2 = k_3 = k$ gilt. Es soll mit folgenden Bewegungsgleichungen weiter gerechnet werden:

$$\begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 \\ 0 & 2ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & k \\ k & 5k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems sowie die zugehörigen Eigenformen. Skizzieren Sie die Eigenformen des Systems graphisch.

f) Normieren Sie die Eigenvektoren und bestimmen Sie die daraus resultierende Modalmatrix $\mathbf{\Phi}$ sowie die entkoppelten Bewegungsgleichungen. Nennen Sie einen Lösungsansatz für die entkoppelten modalen Bewegungsgleichungen.

Hinweise zu f): Wählen Sie für die Normierung m als Bezugsmasse und a als Bezugslänge, so dass $c^2 = M_0 L_0^2 = ma^2$ gilt. Ein Nachweis, dass die modale Massenmatrix und die modale Steifigkeitsmatrix Diagonalform haben, ist nicht gefordert.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Ortsvektoren:

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -a\cos(\varphi_1) \\ -a\sin(\varphi_1) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} a\cos(\varphi_2) \\ -a\sin(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{bmatrix} a\sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 \\ -a\cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{x}}_3 = \begin{bmatrix} -a\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \\ -a\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

kinetische Energien:

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{1}{2}ma^2(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)\dot{\varphi}_1{}^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}_1{}^2$$
$$T_3 = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}_3 \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_3 = \frac{1}{2}ma^2(\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2)\dot{\varphi}_2{}^2 = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}_2{}^2$$

b) gleiche kinetische Energien:

$$T_1 = T_2$$
$$T_4 = T_3$$

gesamte kinetische Energie

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2T_2 + 2T_3 = ma^2\dot{\varphi}_1{}^2 + ma^2\dot{\varphi}_2{}^2$$

c) potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2}k_1(2\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\varphi_1+\varphi_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(2\varphi_2)^2 = (2k_1 + \frac{1}{2}k_2)\varphi_1^2 + (2k_3 + \frac{1}{2}k_2)\varphi_2^2 + k_2\varphi_1\varphi_2$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - V = ma^2\dot{\varphi}_1{}^2 + ma^2\dot{\varphi}_2{}^2 - (2k_1 + \frac{1}{2}k_2)\varphi_1^2 - (2k_3 + \frac{1}{2}k_2)\varphi_2^2 - k_2\varphi_1\varphi_2$$

Koordinatenvektor

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$$

Nach einsetzen und Ableiten folgt:

$$\begin{bmatrix} 2ma^2 & 0 \\ 0 & 2ma^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k_1 + k_2 & k_2 \\ k_2 & 4k_3 + k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

d1) Bewegungsgleichungen in φ_1 und φ_2 sind entkoppelt , d.h. linker und rechter Teilbalken schwingen unabhängig von einander

$$2ma^2\ddot{\varphi}_1 + 4k_1\varphi_1 = 0$$
$$2ma^2\ddot{\varphi}_2 + 4k_3\varphi_2 = 0$$

d2) Es gilt damit eine starre Bindung zwischen linkem und rechtem Teilsystem mit der Nebenbedingung $\varphi_1 = -\varphi_2$. Das System hat nur noch 1 FHG. Die Bewegungsgleichungen reduzieren sich zu einer:

$$4ma^2\ddot{\varphi}_1 + 4(k_1 + k_3)\varphi_1 = 0$$

e) Eigenkreisfrequenzen bestimmen:

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}) = \det\left(\begin{bmatrix} 5k - \omega^2 \cdot 2ma^2 & k \\ k & 5k - \omega^2 \cdot 2ma^2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

charakteristische Gleichung

$$(\omega^2)^2 - 5\frac{k}{ma^2}\omega^2 + 6\frac{k^2}{m^2a^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{5 \pm 1}{2}\frac{k}{ma^2}$$
$$\omega_1^2 = 2(k/ma^2)\ ,\ \omega_2^2 = 3(k/ma^2)$$

Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{k/m}}{a}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{3}\frac{\sqrt{k/m}}{a}$$

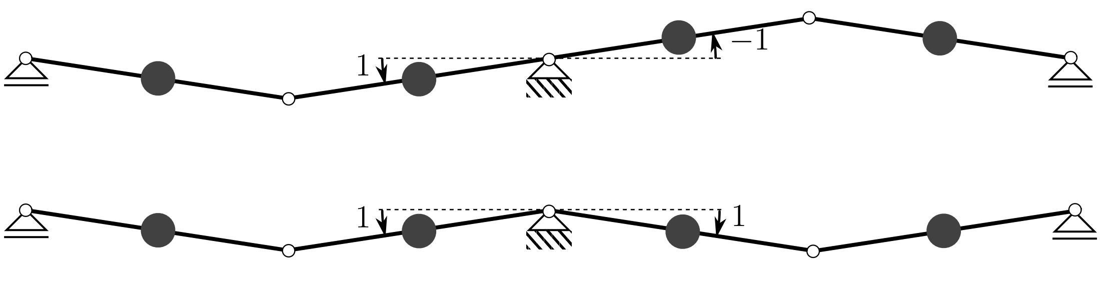
zugehörige Eigenvektoren

$$\boldsymbol{Q}_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_\mathrm{i} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \kappa_\mathrm{i} = -\frac{-m_{11}\omega_\mathrm{i}^2 + k_{11}}{-m_{12}\omega_\mathrm{i}^2 + k_{12}}$$

hier damit:

$$\kappa_1 = -1 \quad , \quad \kappa_2 = 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skizze der Eigenformen (oben: Grundschwingung, unten: 1. Oberschwingung):



f) Normierung der Eigenvektoren

$$\boldsymbol{\phi}_1 = c\boldsymbol{Q}_1 \ , \ \boldsymbol{\phi}_2 = d\boldsymbol{Q}_2$$

Einsetzen in Normierungsvorschrift:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}} = m_0 l_0^2 = ma^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2} \ , \ d = \frac{1}{2}$$

Damit folgt die Modalmatrix:

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \ \boldsymbol{\phi}_2] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Für die Transformation der Steifigkeitsmatrix gilt

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}} = m_0 l_0^2 \omega_{\mathrm{i}}^2 = ma^2 \omega_{\mathrm{i}}^2$$

Außerdem gilt für $i \neq j$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{j}} &= 0 \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{j}} &= 0 \end{aligned}$$

Mit der Transformation $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi x}$ und vormultiplizieren der Bewegungsgleichung mit $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$ entkoppeln sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi x} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi x} = \boldsymbol{0} \quad &\Rightarrow ma^2 \ddot{x}_{\mathrm{i}} + ma^2 \omega_{\mathrm{i}}^2 x_{\mathrm{i}} = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{x}_{\mathrm{i}} + \omega_{\mathrm{i}}^2 x_{\mathrm{i}} = 0 \end{aligned}$$

mit $i \in 1, 2$. Die Bewegungsgleichungen entsprechen einer harmonischen, ungedämpften Schwingungen, sodass der Ansatz lautet:

$$x_{\mathrm{i}} = A_{\mathrm{i}} \cos(\omega_{\mathrm{i}} t) + B_{\mathrm{i}} \sin(\omega_{\mathrm{i}} t)$$

Prüfung in
Baudynamik
am 15. Februar 2022

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....