Modulprüfung

Dynamik

09. März 2022

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

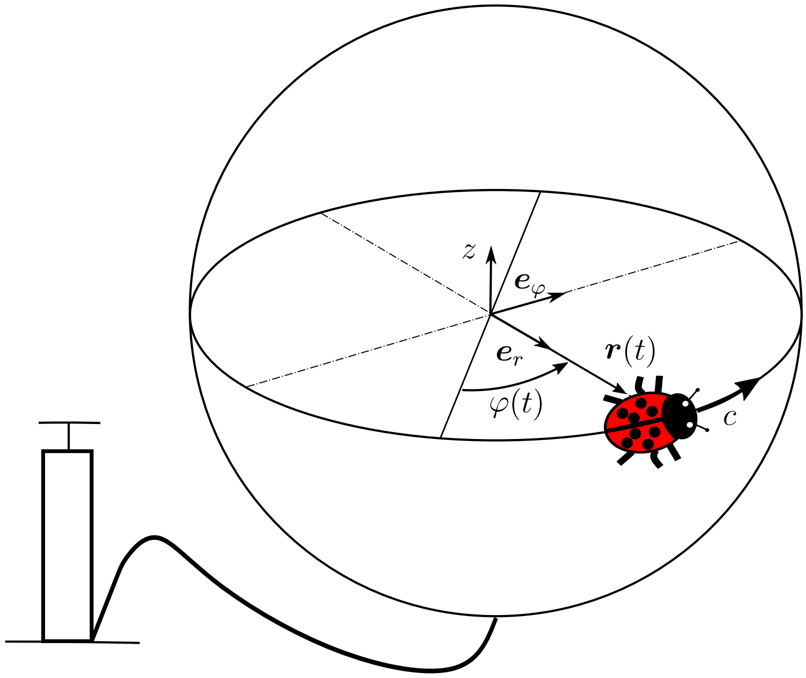
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Ein Ball wird so aufgepumpt, dass der Radius mit einer konstanten Geschwindigkeit η zunimmt. Ein Käfer krabbelt mit konstanter Bahngeschwindigkeit c entlang des Äquators. Die Position des Käfers wird mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ dargestellt. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ hat der Ball den Radius r_0.

Hinweis: Es handelt sich bei der Aufgabe um ein Problem in der Ebene. Nutzen Sie **ausschließlich** eine Darstellung in **Polarkoordinaten**.

a) Stellen Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des Käfers in Polarkoordinaten auf. Geben Sie dabei die radiale Komponente explizit als Funktion der Zeit an.

b) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Krabbelgeschwindigkeit c des Käfers an.

c) Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor in Abhängigkeit der Zeit.

Gegeben: $t_0 = 0$, $r(t_0) = r_0$, c, η

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Radius

konstante Geschwindigkeit $\Rightarrow \dot{r} = \eta \;\Rightarrow r(t) = \eta\, t + C_1$

Anfangsbedingung: $r(0) = r_0 \Rightarrow \underline{r(t) = \eta\, t + r_0}$

Ortsvektor

Polarkoordinaten $\boldsymbol{r} = r(t)\,\boldsymbol{e}_r$

b) Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Krabbelgeschwindigkeit

Bahngeschwindigkeit: $\dot{\boldsymbol{r}}(s(t)) = \dot{s}\,\boldsymbol{e}_t$

Geschwindigkeit: $\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi = c\,\boldsymbol{e}_t$

Betrag der Geschwindigkeit: $|\boldsymbol{v}| = c = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}$

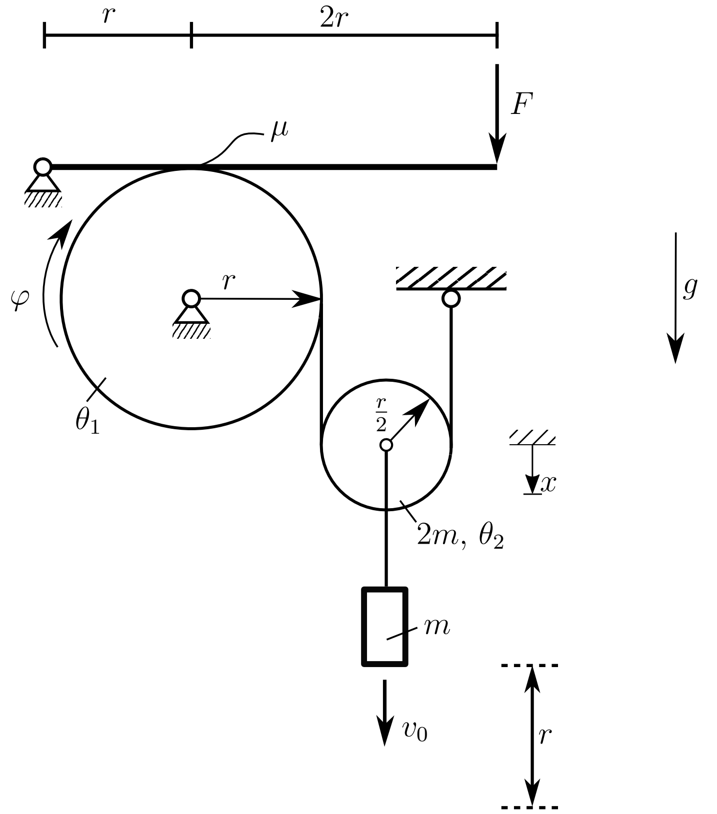
$$\dot{s}^2 = c^2 = \dot{r}^2 + (\dot{\varphi}\, r)^2 \quad \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{c^2 - \dot{r}^2}}{r} = \frac{\sqrt{c^2 - \eta^2}}{r_0 + \eta t}$$

c) Beschleunigungsvektor

konstante Geschwindigkeit $\Rightarrow \dot{r} = \eta \Rightarrow \ddot{r} = 0$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\boldsymbol{e}_r + (r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi})\,\boldsymbol{e}_\varphi \\
&= -\frac{(c^2 - \eta^2)}{r}\boldsymbol{e}_r + \left(-\frac{\sqrt{(c^2 - \eta^2)}\,\ddot{\varphi}}{r} + 2\,\eta\,\frac{\sqrt{c^2 - \eta^2}}{r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{r_0 + \eta\, t}\left((\eta^2 - c^2)\,\boldsymbol{e}_r + \eta\sqrt{(c^2 - \eta^2)}\,\boldsymbol{e}_\varphi\right)
\end{aligned}$$

2. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



Ein System aus zwei Rollen und einer Punktmasse soll über einen **masselosen** Bremshebel durch die Kraft F zum Stillstand gebracht werden. Die Rollen sind über ein masseloses Seil verbunden. Zwischen dem Seil und den Rollen liegt Haften vor und zwischen der großen Rolle und dem Bremshebel Reibung mit dem Reibkoeffizienten μ. Im Anfangszustand hat die Punktmasse die Geschwindigkeit v_0.

a) Stellen Sie die kinematischen Zwangsbedingungen zwischen $\dot{\varphi}$ und $\dot{x}$ auf und geben Sie die Anfangs-Winkelgeschwindigkeit der beiden Rollen an.

b) Geben Sie die kinetische und potentielle Energie im Anfangszustand an.

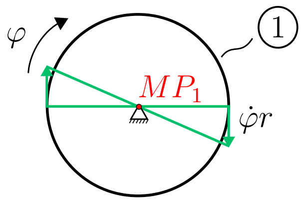
c) Bestimmen Sie die Normal- und Reibkraft zwischen Hebel und großer Rolle.

d) Bestimmen Sie mit dem Arbeitssatz die Kraft F, bei der die Punktmasse nach der Strecke r zur Ruhe kommt.

Gegeben: $g,\ r,\ m,\ v_0 = \sqrt{gr},\ \mu,\ \theta_1 = mr^2,\ \theta_2 = \frac{1}{2}mr^2$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Kinematik:

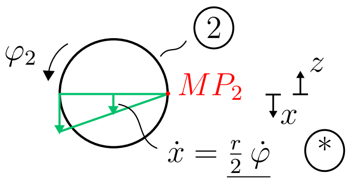


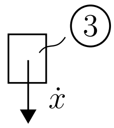
Anfangs-Winkelgeschwindigkeit:

$\dot\varphi_0 = \dot\varphi_{2,0} = \frac{2\,v_0}{r}$

$2 \cdot \left(\frac{r}{2}\right) \dot\varphi_2 \overset{!}{=} \dot\varphi r$

$\Rightarrow \quad \underline{\dot\varphi_2 = \dot\varphi}$

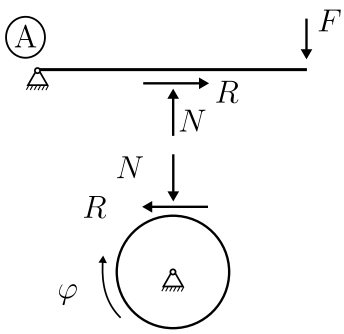




b) Energien:

$$V_0 = 0 \qquad T_0 = \underbrace{\frac{1}{2}\,\theta_1\,\dot\varphi_0^2}_{=T_{0,1}} + \underbrace{\frac{1}{2}(2m)\,\dot x_0^2 + \frac{1}{2}\,\theta_2\,\dot\varphi_{2,0}^2}_{=T_{0,2}} + \underbrace{\frac{1}{2} m\,v_0^2}_{=T_{0,3}} = \underline{4,5 m\,v_0^2}$$

c) Normal- und Reibkraft:



$$\Sigma M^A = 0: \qquad N = 3\,F$$

$$\Rightarrow \quad R = 3\,\mu\,F$$

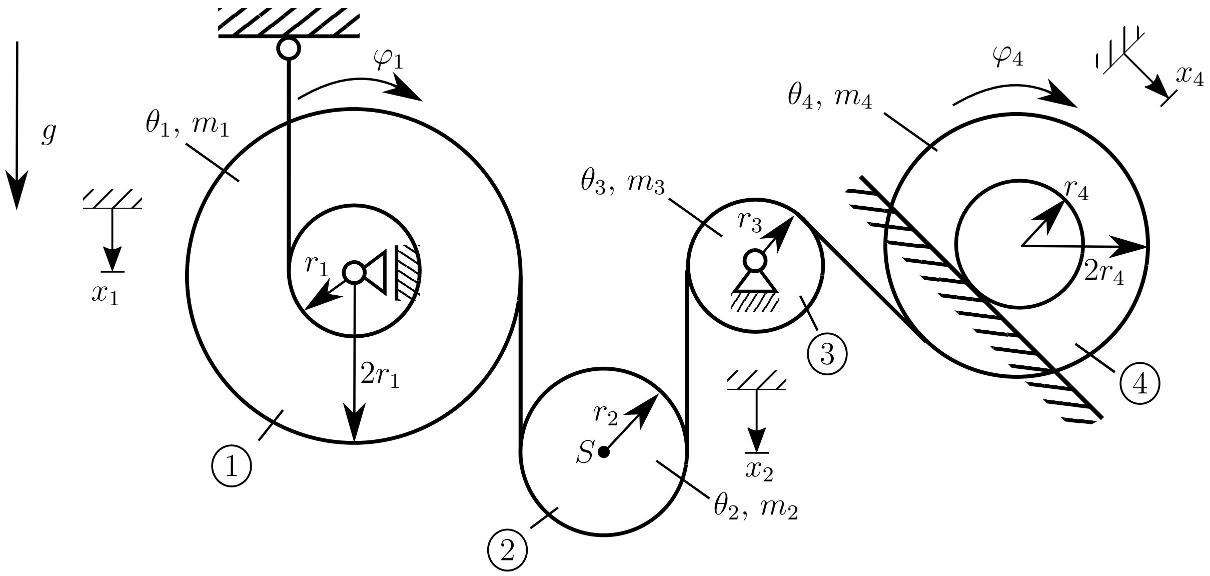
d) Arbeitssatz:

$$V_1 = -3mgr \qquad T_1 = 0$$

$$W\Big|_0^1 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} rR\;\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{\frac{2x_1}{r}=2} rR\;\mathrm{d}x = -rRx\Big|_0^2 = -2rR$$

$$\Rightarrow \quad 4,5mv_0^2 - 2rR = -3mgr \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{F = \frac{5}{4}\frac{mg}{\mu}}$$

3. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Das skizzierte System besteht aus den zwei Stufenrollen 1 (Masse m_1, Massenträgheitsmoment θ_1, Schwerpunktskoordinate x_1) und 4 (Masse m_4, Massenträgheitsmoment θ_4, Schwerpunktskoordinate x_4) sowie den Rollen 2 (Masse m_2, Massenträgheitsmoment θ_2, Schwerpunktskoordinate x_2) und 3 (Masse m_3, Massenträgheitsmoment θ_3), die über ein masseloses Seil verbunden sind. An allen Berührungsstellen wird Haften vorausgesetzt.

a) Kennzeichnen Sie die Lage des Momentanpols von Rolle 2 für den Fall $\dot{\varphi}_4 = 0$.

b) Stellen Sie die kinematischen Zwangsbedingungen zwischen $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_4$, $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_4$ auf, so dass Rolle 2 sich rein translatorisch bewegt. Geben Sie für diesen Fall die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems an.

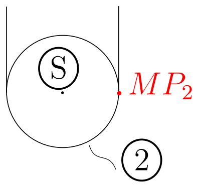
c) Stellen Sie für die in Aufgabenteil b) beschriebene Situation die Bewegungsdifferentialgleichung für die Rolle 2 in der Koordinate x_2 auf.

Gegeben: $g,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ m_1,\ \theta_1,\ m_2,\ \theta_2,\ m_3,\ \theta_3,\ m_4,\ \theta_4$

Hinweis: Lösungen mit anderen Methoden als der synthetischen werden nicht gewertet.

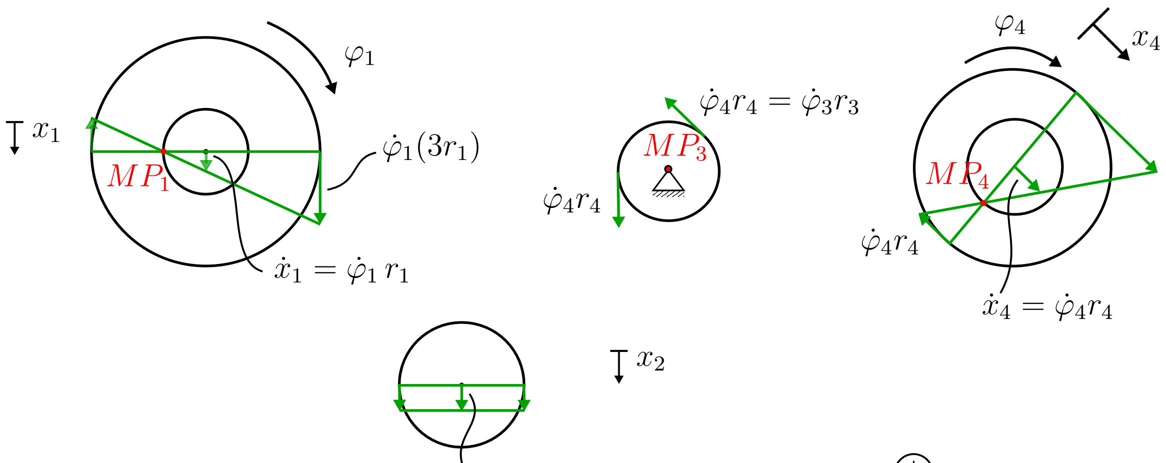
Musterlösung - Aufgabe 3

a) Momentanpol:



b) Kinematik:

ges.: $\dot{x}_2 = f(\dot{\varphi}_1) = f(\dot{\varphi}_4) = f(\dot{x}_1) = f(\dot{x}_4)$

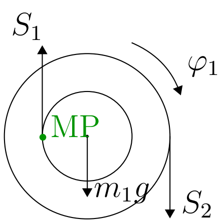


$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi}_1 3r_1 = \dot{\varphi}_4 r_4 = \dot{x}_4 = 3\dot{x}_1 \quad (*)$$

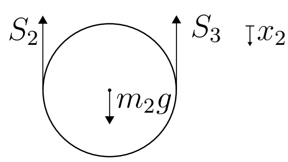
$\Rightarrow$ 1 FHG

c) Kinetik:

ges.: Bewegungsgleichung für x_2



(I) : $\Sigma M_{iz}^{MP} = \theta_1^{MP} \ddot{\varphi}_1 : \quad m_1 g\, r_1 + S_2\, 3r_1 = \theta_1^{MP}\, \ddot{\varphi}_1$ (i)



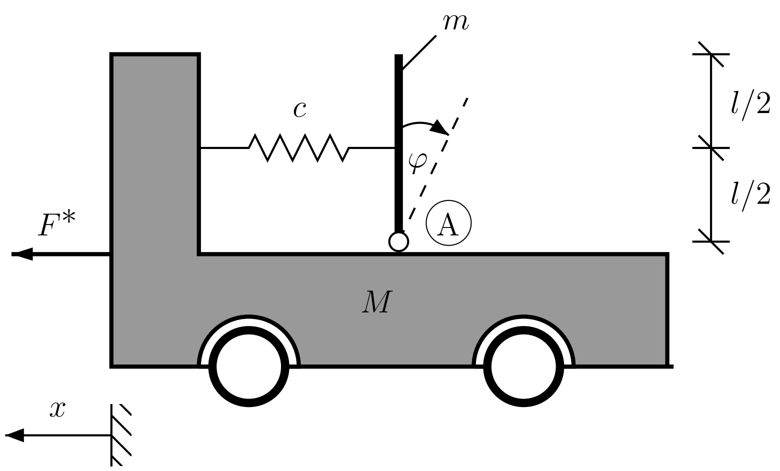
(II): $\Sigma M_{iz}^{S} = 0 : \qquad S := S_3 = S_2$

$\Sigma F_{ix_2} = m_2 \ddot{x}_2 : \quad m_2 g - 2S = m_2 \ddot{x}_2$ (ii)

(i) & (*) in (ii) : $$\ddot{x}_2 = \frac{g\left(m_2 + \frac{2}{3}\, m_1\right)}{m_2 + \frac{2}{9r_1^2}\, \theta_1^{MP}} \quad \text{mit} \quad \theta_1^{MP} = m_1 r_1^2 + \theta_1^S$$

$$= \frac{g\left(m_2 + \frac{2}{3} m_1\right)}{m_2 + \frac{2}{9}\, m_1 + \frac{2}{9r_1^2}\, \theta_1^S}$$

4. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Ein Fahrzeug der Masse M transportiert ein Fertigbauteil, das in der Ebene als homogener Stab der Masse m und Länge l betrachtet werden kann. Der Stab ist im Fußpunkt A drehbar gelagert und horizontal wie skizziert durch eine Feder der Steifigkeit c am Fahrzeug abgestützt. Auf das Fahrzeug wirkt eine konstante Antriebskraft F^*.

a) Stellen Sie die notwendigen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren auf und geben Sie die Anzahl der Freiheitsgrade an.

b) Geben Sie die Energien und die generalisierten Nichtpotentialkräfte an.

c) Stellen Sie mittels der Methode nach Lagrange die nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Systems in den eingezeichneten Koordinaten x und φ auf und linearisieren Sie anschließend für kleine Winkel und Winkelgeschwindigkeiten ($|\varphi|, |\dot{\varphi}| \ll 1$).

Im Folgenden sollen nur noch die linearisierten Bewegungsgleichungen des Systems betrachtet werden.

d) Geben Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems für den Fall $M = 5\,m$ an.

Gegeben: $M,\ m,\ c,\ l,\ F^*$

Hinweise

- *Anderen Methoden als die Methode nach Lagrange werden nicht gewertet.*
- *Der Einfluss der Erdbeschleunigung g sei vernachlässigbar.*
- $2\cos\varphi\sin\varphi = sin(2\varphi)$

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Generalisierte Koordinaten: $q_1 = x$ und $q_2 = \varphi$ $\qquad \Rightarrow$ FHG: 2

Orts- und Geschwindigkeitsvektoren

$$\boldsymbol{r}_M = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \dot{\boldsymbol{r}}_M = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_m = \begin{bmatrix} x - \frac{l}{2}\sin(\varphi) \\ \frac{l}{2}\cos(\varphi) \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\boldsymbol{r}}_m = \begin{bmatrix} \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

b) Kinetische und Potentielle Energie

$$T = \frac{1}{2}M\,|\dot{\boldsymbol{r}}_M|^2 + \frac{1}{2}m\,|\dot{\boldsymbol{r}}_m|^2 + \frac{1}{2}\theta_m^S\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2(M+m) - \frac{1}{2}m\,l\,\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\dot{x} + \frac{1}{6}m\,l^2\,\dot{\varphi}^2$$

$$V = \frac{1}{8}c\,l^2\,\sin^2\varphi$$

Generalisierte Nichtpotentialkräfte

$$Q_1^* = \begin{bmatrix} F^* \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_M}{\partial\,x} = F^* \qquad Q_2^* = \begin{bmatrix} F^* \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial\,\boldsymbol{r}_M}{\partial\,\varphi} = 0$$

c) *Lagrange*-Gleichungen

$\underline{q_1 = x:}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\,\ddot{x} + \frac{1}{2}m\,l\left(\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\,\ddot{\varphi}\right) \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = F^* \qquad \text{and with} \quad |\varphi| << 1: \; (M+m)\,\ddot{x} - \frac{1}{2}m\,l\,\ddot{\varphi} = F^*$$

$\underline{q_2 = \varphi:}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{6}m\,l(3\,\sin\varphi\,\dot{x}\,\dot{\varphi} - 3\,\cos\varphi\,\ddot{x} + 2\,l\,\ddot{\varphi}) \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}m\,l\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\dot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{1}{8}c\,l^2\,\sin(2\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

and with $|\varphi| << 1: \; -\frac{1}{2}m\,l\,\ddot{x} + \frac{m\,l^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{c\,l^2}{4}\varphi = 0$

d) Eigenfrequenzen für $M = 5\,m$:

$$\left[(M+m)\,\frac{1}{3}m\,l^2 - \left(\frac{1}{2}m\,l^2\right)^2\right]\omega^4 - (M+m)\,c\,\frac{l^2}{4}\,\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_1^2 = 0}\,, \qquad \underline{\omega_2^2 = \frac{6}{7}\frac{c}{m}}$$