Prüfung in

Baudynamik

20. Februar 2023

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				
Korrektur				

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)

a) Was versteht man unter der *stationärer Lösung* einer harmonisch erregten Schwingung und wie kann sie ermittelt werden?

b) Von welchen Größen hängt die Amplitude infolge Erregung eines ungedämpften 1 FHG-Schwingers durch einen plötzlichen (idealen) Stoß ab?

c) Was versteht man unter aktiver und passiver Schwingungsisolierung?

d) Wie lässt sich die Beschreibung gekoppelter Mehrfreiheitsgradschwingungen entkoppeln? In welcher Form muss sich hierbei die Dämpfungsmatrix darstellen lassen?

e) Sind die Eigenvektoren, die die Eigenschwingungen eines dynamischen Systems charakterisieren, eindeutig festgelegt? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

f) Die Dämpfungsmatrix eines frei schwingenden Systems mit zwei Freiheitsgraden hat die Form

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

mit $d > 0$. Ist das System vollständig gedämpft? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

g) Skizzieren Sie die Vegrößerungsfunktion für eine Unwuchtanrregung $V_1(\eta, D)$. Zeigen Sie dabei den Einfluss von $D \in [0, 1]$ auf die Vergrößerungsfunktion auf.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Unter der *stationären Lösung* versteht man die Lösung im eingeschwungenen Zustand nachdem die homogene Lösung aufgrund von Dämpfung abgeklungen ist. Die stationäre Lösung entspricht damit der Partikulärlösung. Sie kann über einen Ansatzt vom „Typ der rechten Seite“ ermittelt werden.

b) Die relevanten Größen sind Stoßitensität, Masse und Eigenfrequenz bzw. Steifigkeit. Die maximale Amplitude ergibt sich zu:

$$A_{max} = \frac{I}{\omega_0 m}$$

c) Ziel der aktiven Schwingungsisolierung: Abschirmung eines Bauwerkes von Maschinen (z.B. Unwuchtanrerung) vom Fundament
Ziel der passiven Schwingungsisolierung: Schutz eines Schwingers (Gebäudes) vor Belastungen infolge Fundamenterregung

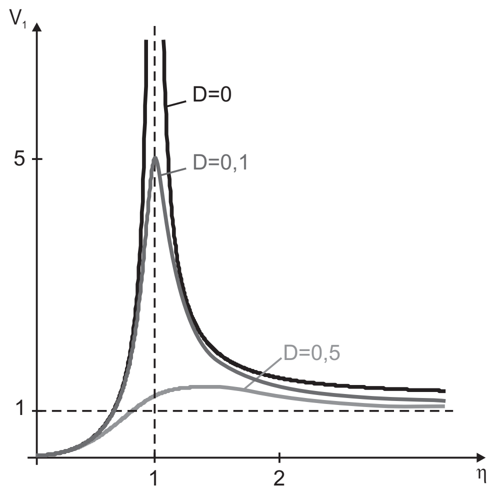
d) Eine Entkopplung kann durch eine Modaltransformation erreicht werden. Die Dämpfungsmatrix muss sich dabei als $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ (Bequemlichkeitshypothese) darstellen lassen.

e) Nein, die Richtung der Eigenvektoren ist eindeutig während ihre Norm unbestimmt bleibt. Die Gleichung des Eigenwertproblems

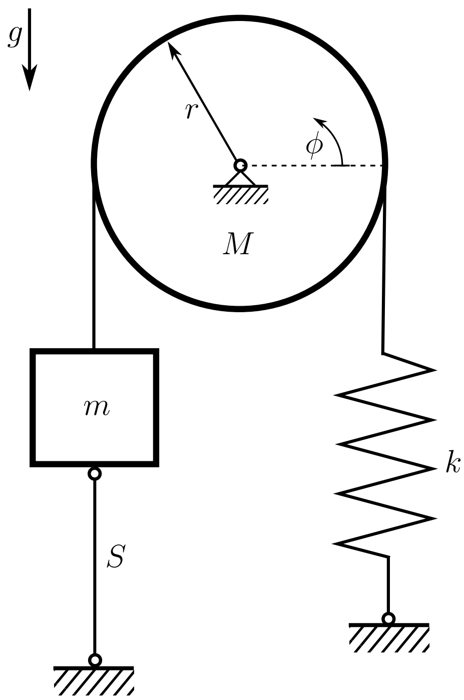
$$\mathbf{Av} = \mathbf{0}$$

kann mit skalaren Werten $c \in \mathbb{R}$ durchmultipliziert werden, d.h. auch Vielfache von Eigenvektoren ($\mathbf{\Phi} = c\,\mathbf{v}$) sind Eigenvektoren des System.

f) Ja, da $\mathbf{D}$ den vollen Rang hat ($\det(\boldsymbol{D}) > 0$) bzw. $\mathbf{D}$ positiv definit ist ($\det(\mathbf{D} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0 \Rightarrow \lambda = d > 0$).

g) 

2. Aufgabe: (ca. 35 % der Gesamtpunkte)



Das oben abgebildete System besteht aus einer in der Mitte drehbar gelagerten Umlenkrolle, über welche ein undehnbares Seil verläuft. Auf der rechten Seite ist das Seil über eine Feder mit der Steifigkeit k mit dem Boden verbunden. An der linken Seite ist am Seil eine Masse m befestigt. Die Masse wird über die starre Pendelstütze S abgestützt. Die Feder ist im gezeigten Zustand entspannt. Es kann davon ausgegangen werden, dass kein Schlupf zwischen Seil und Umlenkrolle stattfindet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Pendelstütze plötzlich herausgeschlagen.

Gegeben: $m,\ M = 2\,m,\ r,\ k,\ g$

a) Schneiden Sie das System im ausgelenkten Zustand frei.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit von ϕ.

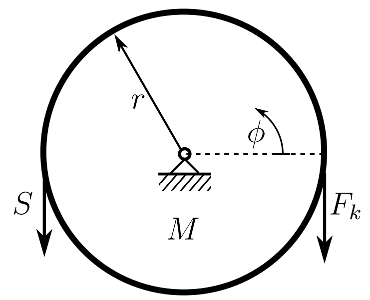
c) Geben Sie die allgemeine, homogene Lösung $\phi_{\mathrm{h}}(t)$ der Bewegungsgleichung an.

d) Geben Sie die partikuläre Lösung $\phi_{\mathrm{p}}(t)$ der Bewegungsgleichung an.

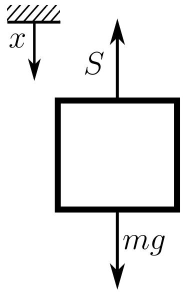
e) Geben Sie die vollständige Lösung $\phi(t) = \phi_{\mathrm{h}}(t)+\phi_{\mathrm{p}}(t)$ der Bewegungsgleichung an. Nutzen Sie hierzu die entsprechenden Anfangswerte.

f) Skizzieren Sie die homogene, partikuläre und vollständige Lösung qualitativ.

Musterlösung - Aufgabe 2



a)



b) Kinematik:

$$\begin{aligned} x &= r\phi \\ \Rightarrow \ddot{x} &= r\ddot{\phi} \end{aligned}$$

Schwerpunktsatz:

$$\begin{aligned} -S + m\,g &= m\,\ddot{x} \\ \Rightarrow S &= -m\,\ddot{x} + m\,g \end{aligned}$$

Drallsatz:

$$\begin{aligned} -F_k\,r + S\,r &= \Theta^S\ddot{\phi} && \text{mit } \Theta^S = \frac{1}{2}Mr^2 = mr^2 \\ \Rightarrow mr^2\ddot{\phi} + kr^2\phi &= -mr^2\ddot{\phi} + mgr && \text{mit } F_k = k\Delta x = kr\phi \\ \Rightarrow 2mr^2\ddot{\phi} + kr^2\phi &= mgr \\ \Rightarrow \ddot{\phi} + \omega_0^2\phi &= \frac{1}{2}\frac{g}{r} && \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \end{aligned}$$

c) homogene Lösung über exponential Ansatz:

$$\phi_\mathrm{h}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

d) partikuläre Lösung über Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \phi_\mathrm{p}(t) &= C = konst. \\ \Rightarrow \phi_\mathrm{p}(t) &= \frac{mg}{kr} \end{aligned}$$

e) vollständige Lösung:

$$\phi(t) = \phi_\mathrm{h}(t) + \phi_\mathrm{p}(t)$$

<u>Anfangsbedingungen:</u>

$$\phi(t=0) = \phi_0 = 0$$
$$\dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}_0 = 0$$

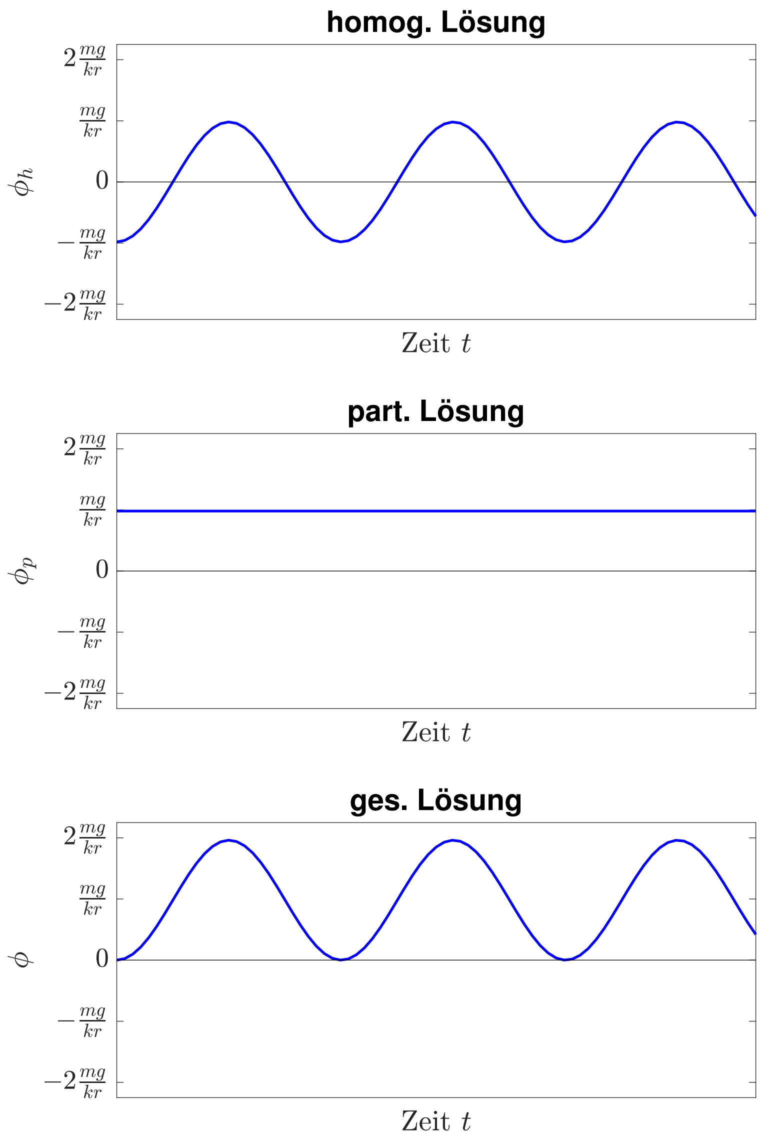
Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert:

$$\phi(t=0) = 0 = A + \frac{mg}{kr} \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{mg}{kr}$$
$$\dot{\phi}(t=0) = 0 = -B\omega_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0$$

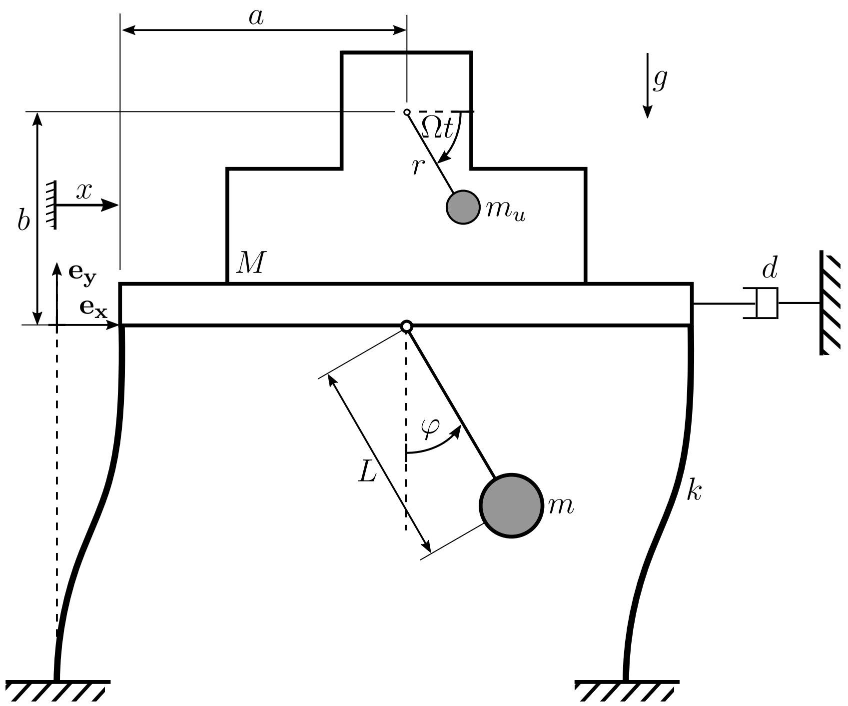
Damit folgt die Lösung:

$$\phi(t) = -\frac{mg}{kr}\cos(\omega t) + \frac{mg}{kr}$$

f)



3. Aufgabe: (ca. 50 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte einstöckige Rahmen besteht aus einem starren Riegel und zwei masselosen Stielen der Gesamtsteifigkeit k. Dämpfung wird durch einen Dämpfer (Dämpferkonstante d) berücksichtigt. Auf dem Riegel ist eine Maschine mit einer rotierenden Unwucht (Masse m_u, Radius r, Winkelgeschwindigkeit Ω) montiert. Die gesamte Masse des starren Riegels und des Maschinenkörpers ohne Unwucht beträgt M. Zur Schwingungstilgung wird ein Pendel mit der Masse m und der Länge L am Riegel angebracht.

Gegeben: $M = 5\,m$, m, $m_u = m$, $k = 10\frac{m\,g}{L}$, r, L, d, Ω

a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

b) Geben Sie die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren für die Masse des Pendels und die Masse der Unwucht an. Der Riegel bewegt sich dabei rein horizontal. Nutzen Sie hierfür das gegebene Koordinatensystem.

c) Geben Sie die kinetische und potentielle Energie sowie Rayleigh-Dissipationsfunktion des Systems an.

d) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage und stellen Sie diese in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$$

dar.

e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen und Modalvektoren des ungedämpften Systems.

f) Ist das System durchdringend gedämpft? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im Weiteren soll das ungedämpfte System betrachtet werden ($d = 0$). Es soll davon ausgegangen werden, dass die zugehörigen Bewegungsgleichungen wie folgt

$$\begin{bmatrix} 7\,m & mL \\ mL & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_u \Omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} \cos{(\Omega t)}$$

lauten.

g) Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude der erzwungenen Schwingungen für den stationären Fall.

h) Wie muss die Länge des Pendels gewählt werden, damit Schwingungstilgung auftritt?

Musterlösung - Aufgabe 3

a) 2 Freiheitsgrade: $x, \varphi \Rightarrow \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$

b) Orts-& Geschwindigkeitsvektor für den Riegel: (nicht explizit in Aufgabenstellung verlangt - hilfreich für Aufgabenteil c))

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} a + x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Orts-& Geschwindigkeitsvektor für das Pendel:

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} a + x + L\sin(\varphi) \\ -L\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + \dot{\varphi}\, L\cos(\varphi) \\ \dot{\varphi}\, L\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

Orts-& Geschwindigkeitsvektor für das Pendel:

$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} a + x + r\cos(\Omega t) \\ b - r\sin(\Omega t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x} + r\,\Omega\,\sin(\Omega t) \\ -r\,\Omega\,\cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

c) kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 + \frac{1}{2}m_u|\dot{\boldsymbol{r}}_3|^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left[7\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2L^2 + r^2\Omega^2 + 2\left(\dot{x}\dot{\varphi}L\cos(\varphi) - \dot{x}\,r\,\Omega\sin(\Omega t)\right)\right] \end{aligned}$$

potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mg\left(-L\cos(\varphi) + b - r\sin(\Omega t)\right)$$

Rayleigh-Dissipationsfunktion

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\,d\dot{x}^2$$

d) Lagrange-Funktion:

$$L = T - V$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$$

$\underline{q_1 = x:}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1}$$

$$7m\ddot{x} + m\left[\ddot{\varphi}L\cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 L\sin(\varphi) - r\Omega^2\cos(\Omega t)\right] + kx = -d\dot{x}$$

Linearisiert: $$7m\ddot{x} + m\left[\ddot{\varphi}L\cos(\varphi) - r\Omega^2\cos(\Omega t)\right] + kx = -d\dot{x}$$

$\underline{q_2 = \varphi:}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2}$$

$$mL^2\ddot{\varphi} + m\ddot{x}L\cos(\varphi) - m\dot{x}\dot{\varphi}L\sin(\varphi) - mgL\sin(\varphi) = 0$$

Linearisiert: $$mL^2\ddot{\varphi} + m\ddot{x}L - mgL\varphi = 0$$

Das Gleichungssystem ergibt sich damit zu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 7m & mL \\ mL & mL^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} mr\Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}} \cos\Omega t$$

e) Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned} &\det\left(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}\right) \\ &= \left(k - \omega^2\,7m\right)\left(mgL - \omega^2 mL^2\right) - \omega^4 m^2 L^2 \\ \text{Einsetzten von } k\text{:} \quad &= \omega^4\left(6m^2L^2\right) - \omega^2\left(7m^2gL + 10m^2gL\right) + 10m^2g^2 \\ &= \omega^4 - \omega^2\frac{17}{6}\frac{g}{L} + \frac{5}{3}\frac{g^2}{L^2} = 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte:

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{17}{12}\frac{g}{L} \pm \frac{7}{12}\frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{5}{6}\frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow \omega_2^2 = 2\frac{g}{L}$$

Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_i \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \kappa_i = -\frac{k_{11} - \omega_i^2 m_{11}}{k_{12} - \omega_i^2 m_{12}}$$

$$\kappa_1 = 5\frac{1}{L} \qquad \kappa_2 = -2\frac{1}{L}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5\frac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

f) Überprüfung der Definitheit:

$$\det(\boldsymbol{D}) = 0$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{D}$ is positiv (kann aus Herleitung über Rayleigh-Dissipationsfunktion gesagt werden - nicht gefragt) semi-definit.
Suche Vektor $\boldsymbol{v}$, sodass gilt:

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = 0$$

z.B. $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Überprüfung der Kolliniearität zu Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{v} \neq c\boldsymbol{v}_i \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ System ist durchdringend gedämpft.

g) Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{a}\cos(\Omega t)$$

Die Beschleunigung ergeben sich aus der 2-fachen zeitlichen Ableitung zu:

$$\ddot{\boldsymbol{q}}(t) = -\Omega^2 \boldsymbol{a}\cos(\Omega t)$$

Einsetzen in Gleichungsystem liefert:

$$\left(\boldsymbol{K} - \Omega^2 \boldsymbol{M}\right) \boldsymbol{a}\cos(\Omega t) = \boldsymbol{F}\cos(\Omega t)$$

Aus einem Koeffizientenvergleich folgt:

$$\left(\boldsymbol{K} - \Omega^2 \boldsymbol{M}\right) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

Das Gleichungsystem kann mit Hilfe der Cramerschen Regel gelöst werden:

$$a_1 = \frac{Z_1}{N} \qquad a_2 = \frac{Z_2}{N}$$

mit

$$N = \det(\boldsymbol{K} - \Omega^2 \boldsymbol{M}) = \left(6L^2\Omega^4 - 17gL\Omega^2 + 10g^2\right) m^2$$

$$Z_1 = \begin{vmatrix} m_u\Omega^2 r & -\Omega^2 mL \\ 0 & mgL - \Omega^2 mL^2 \end{vmatrix} = m_u mgLr\Omega^2 - \Omega^4 mm_u L^2 r$$

$$Z_2 = \begin{vmatrix} \frac{10mg}{L} - 7m\Omega^2 & m_u\Omega^2 r \\ -\Omega^2 mL & 0 \end{vmatrix} = mm_u\Omega^4 rL$$

h) Tilgung:

$$a_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow a_1 = \frac{Z_1}{N} \Rightarrow Z_1 = 0$$
$$Z_1 = 0 \Rightarrow mgL - \Omega^2 mL^2$$
$$\Rightarrow L = \frac{g}{\Omega^2}$$