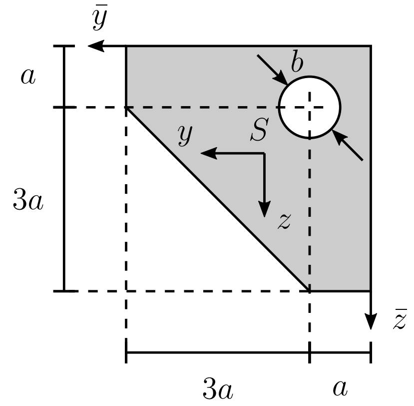
1. Aufgabe: (ca. 19 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei obiger Balkenquerschnitt mit Bohrung (Durchmesser $b = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a$).
Bestimmen Sie:

a) Die Koordinaten des Flächenschwerpunktes in Bezug auf das eingezeichnete $\bar{y}-\bar{z}-$System.

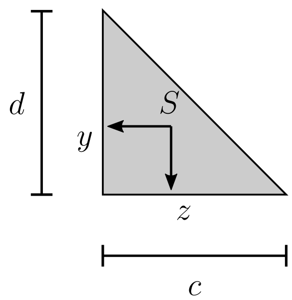
Für die weitere Berechnung sei der Flächenschwerpunkt S bei $\bar{y}_s = \bar{z}_s = \frac{3}{2}a$ anzunehmen! Bestimmen Sie:

b) die Trägheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} bezüglich des $y-z-$Koordinatensystems mit Ursprung im Flächenschwerpunkt S.

c) die Hauptträgheitsrichtung bezüglich des $y-z-$Koordinatensystems. Zeichnen Sie die Hauptträgheitsachsen in die obige Darstellung ein.

Gegeben: $a, b = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a$

Hinweis:



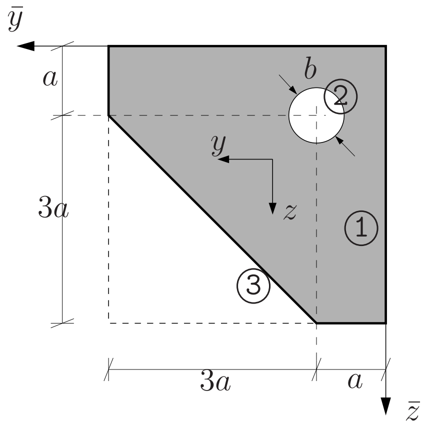
$$I_y = \frac{cd^3}{36}$$

$$I_z = \frac{c^3 d}{36}$$

$$I_{yz} = -\frac{c^2 d^2}{72}$$

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Flächenschwerpunkt (exakt)



i	A_i	$\bar{y}_{s,i}$	$\bar{z}_{s,i}$
1	$16a^2$	$2a$	$2a$
2	$\frac{\pi}{4}b^2 = \frac{1}{2}a^2$	a	a
3	$\frac{9}{2}a^2$	$3a$	$3a$

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_s &= \frac{\sum A_i \cdot \bar{y}_{s,i}}{\sum A_i} = \frac{16a^2 \cdot 2a - \frac{9}{2}a^2 \cdot 3a - \frac{1}{2}a^2 \cdot a}{16a^2 - \frac{9}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{18}{11}a \\ \bar{z}_s &= \frac{\sum A_i \cdot \bar{z}_{s,i}}{\sum A_i} = (...) = \frac{18}{11}a = \bar{y}_s \end{aligned}\right\}$$

b) **Ab hier:** Annäherung Flächenschwerpunkt $\mathcal{S}$ mit $\bar{y}_s = \bar{z}_s = \frac{3}{2}a$!

i	A_i	$I_{y,i}(= I_{z,i})$	$z_i\ (= y_i)$	$A_i z_i^2\ (= A_i y_i^2)$	$I_{yz,i}$	$A_i y_i z_i$
1	$16a^2$	$\frac{(4a)^4}{12} = \frac{64}{3}a^4$	$2a - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a$	$4a^4$	0	$4a^4$
2	$\frac{1}{2}a^2$	$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}a\right)^4 = \frac{a^4}{16\pi}$	$a - \frac{3}{2}a = -\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{8}a^4$	0	$\frac{1}{8}a^4$
3	$\frac{9}{2}a^2$	$\frac{9}{4}a^4$	$3a - \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}a$	$\frac{81}{8}a^4$	$-\frac{9}{8}a^4$	$\frac{81}{8}a^4$

(FTM Δ $(c = d = 3a)$ - $I_y^\Delta = \frac{cd^3}{36} = \frac{9}{4}a^4 \mid I_z^\Delta = \frac{c^3 d}{36} = \frac{9}{4}a^4 \mid I_{yz}^\Delta = -\frac{c^2 d^2}{72} = -\frac{9}{8}a$)

$$\begin{aligned} I_y = I_z &= \left(I_{y,1} + A_1 z_1^2\right) - \left(I_{y,2} + A_2 z_2^2\right) - \left(I_{y,3} + A_3 z_3^2\right) \\ &= \left(\frac{64}{3}a^4 + 4a^4\right) - \left(\frac{a^4}{16\pi} + \frac{1}{8}a^4\right) - \left(\frac{9}{4}a^4 + \frac{81}{8}a^4\right) = a^4\left(\frac{77}{6} - \frac{1}{16\pi}\right) \\ &\approx 12,8134a^4 \end{aligned}$$

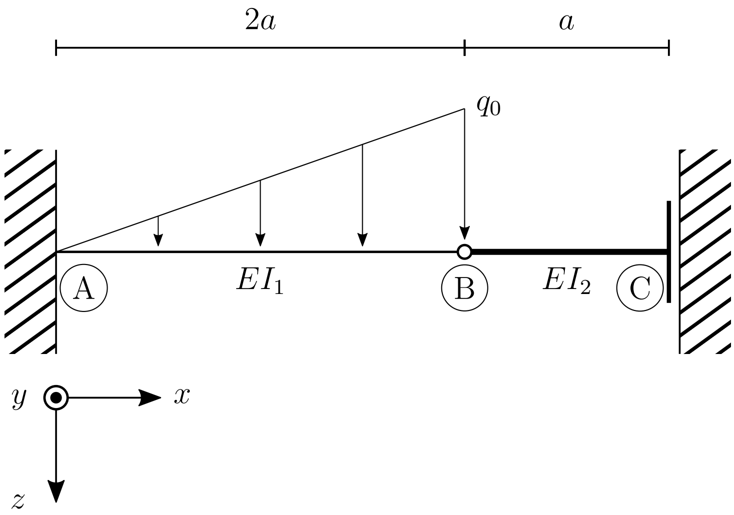
$$\begin{aligned} I_{yz} &= (I_{yz,1} + A_1 y_1 z_1) - (I_{yz,2} + A_2 y_2 z_2) - (I_{yz,3} + A_3 y_3 z_3) \\ &= \left(0 + 4a^4\right) - \left(0 + \frac{1}{8}a^4\right) - \left(-\frac{9}{8}a^4 + \frac{81}{8}a^4\right) = -\frac{41}{8}a^4 = -5,125a^4 \end{aligned}$$

c)

$$\tan 2\varphi = -\frac{\overbrace{2I_{yz}}^{\neq 0}}{\underbrace{I_y - I_z}_{=0}} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4}$$

Korrekte HTA.

2. Aufgabe: (ca. 29 % der Gesamtpunkte)



Der oben dargestellte Zweifeldträger mit Gelenk ist einseitig durch eine lineare Streckenlast $q(x)$ belastet.

a) Geben Sie sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen in den Punkten A, B, und C an.

b) Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ für den gesamten Träger.

c) Für welche Biegesteifigkeit EI_1 stellt sich eine Absenkung $w_c = w(x = 3a) = \dfrac{2}{15}\,a$ am Punkt C ein?

d) Wie ändert sich die Durchbiegung w_B am Punkt B bei Verdopplung der Biegesteifigkeit EI_2? (Auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

wird kleiner	bleibt gleich	wird größer
○	○	○

Gegeben: EI_1, EI_2, a, q_0

Musterlösung - Aufgabe 2

a)

- Unterteilung in zwei Bereiche 1 und 2: $w(x)\begin{cases} w_1(x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2a \\ w_2(x) & \text{für} \quad 2a \leq x \leq 3a \end{cases}$

- Randbedingungen

Punkt A : $\begin{array}{l} w_1(x=0)=0 \\ w_1'(x=0)=0 \end{array}$ (Feste Einspannung)

Punkt B : $\begin{array}{r} w_1(x=2a)=w_2(x=2a) \\ EI_1 w_1''(x=2a)=EI_2 w_2''(x=2a)=-M(x=2a)=0 \text{ (Gelenk)} \\ EI_1 w_1'''(x=2a)=EI_2 w_2'''(x=2a)=-Q(x=2a)\neq 0 \end{array}$

Punkt C : $\begin{array}{r} w_2'(x=3a)=0 \\ EI_2 w_2'''(x=3a)=-Q(x=3a)=0 \end{array}$ (Parallelführung)

b)

- Bereich 1 mit Streckenlast $q(x)=\frac{q_0}{2a}x$

$$\begin{aligned} EI_1 w_1^{IV}(x) &= q(x)=\frac{q_0}{2a}x \\ EI_1 w_1'''(x) &= \frac{q_0}{4a}x^2+C_1 \\ EI_1 w_1''(x) &= \frac{q_0}{12a}x^3+C_1x+C_2 \\ EI_1 w_1'(x) &= \frac{q_0}{48a}x^4+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3 \\ EI_1 w_1(x) &= \frac{q_0}{240a}x^5+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4 \end{aligned}$$

- Bereich 2 keine Streckenlast!

$$\begin{aligned} EI_2 w_1^{IV}(x) &= 0 \\ EI_2 w_2'''(x) &= C_5 \\ EI_2 w_2''(x) &= C_5x+C_6 \\ EI_2 w_2'(x) &= \frac{1}{2}C_5x^2+C_6x+C_7 \\ EI_2 w_2(x) &= \frac{1}{6}C_5x^3+\frac{1}{2}C_6x^2+C_7x+C_8 \end{aligned}$$

- Integrationskonstanten bestimmen

$$\begin{aligned} \text{RB } A_1 &: w_1(x=0)=0 \rightarrow \boxed{C_4=0} \\ \text{RB } A_2 &: w_1'(x=0)=0 \rightarrow \boxed{C_3=0} \\ \text{RB } C_2 &: EI_2 w_2'''(x=3a)=0 \rightarrow \boxed{C_5=0} \end{aligned}$$

$$\text{ÜB } B_3 : EI_1 w_1'''(x=2a)=EI_2 w_2'''(x=2a)$$
$$\Rightarrow -\frac{q_0}{4a}\cdot 4a^2+C_1=C_5 \Leftrightarrow \boxed{C_1=-q_0a}$$

$$\text{ÜB } B_2: EI_1 w_1''(x=2a) = EI_2 w_2''(x=2a) = 0$$

$$\Rightarrow EI_1 w_1''(x=2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{q_0}{12a}(2a)^3 + C_1 2a + C_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}q_0 a^2 - 2q_0 a^2 = -C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = \frac{4}{3}q_0 a^2}$$

$$\Rightarrow EI_2 w_2''(x=2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow C_5 2a + C_6 = 0 \rightarrow \boxed{C_6 = 0}$$

$$\text{RB } C_1: w_2'(x=3a) = 0$$

$$\Rightarrow C_6 3a + C_7 = 0 \rightarrow \boxed{C_7 = 0}$$

$$\text{ÜB } B_1: w_1(x=2a) = w_2(x=2a)$$

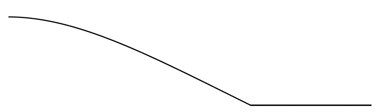
$$\Rightarrow \frac{1}{EI_1}\left(\frac{q_0}{240a}(2a)^5 - \frac{1}{6}q_0 a(2a)^3 + \frac{2}{3}q_0 a^2 (2a)^2\right) = \frac{1}{EI_2}C_8$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C_8 = \frac{EI_2}{EI_1}\left(\frac{22}{15}q_0 a^4\right)}$$

- Biegelinie

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) = \dfrac{1}{EI_1}\left(\dfrac{q_0}{240a}x^5 - \dfrac{q_0 a}{6}x^3 + \dfrac{2q_0 a^2}{3}x^2\right) & \text{für } 0 \leq x \leq 2a \\ w_2(x) = \dfrac{1}{EI_1}\left(\dfrac{22}{15}q_0 a^4\right) & \text{für } 2a \leq x \leq 3a \end{cases}$$

c) • Qualitativer Verlauf Biegelinie



$\Rightarrow$ Absenkung für Bereich 2 konstant (siehe b))

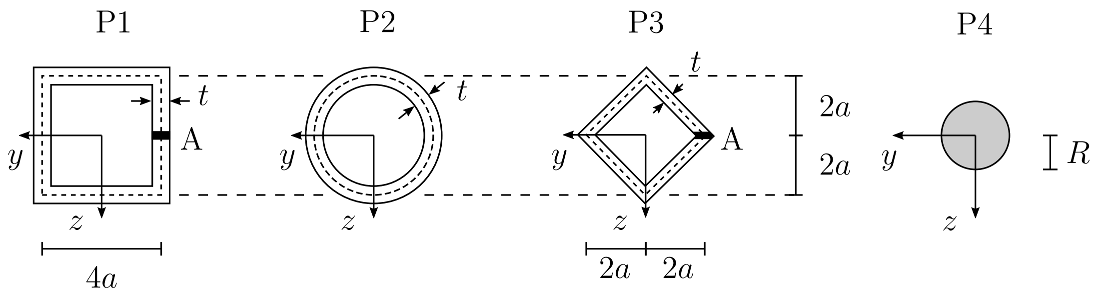
$$w_2(x=3a) = w_c = \frac{2}{15}a$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{15}a = \frac{1}{EI_1}\left(\frac{22}{15}q_0 a^4\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{EI_1 = 11 q_0 a^3}$$

d) Die Durchbiegung w_B ändert sich nicht, da Biegelinie $w(x)$ unabhängig von EI_2 (siehe Aufgabenteil b)).

3. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sind drei Hohlprofile mit $t = \frac{1}{16}\,a$ und ein Vollprofil. Bearbeiten Sie unter Berücksichtigung von $t \ll a$ folgende Aufgabenteile.

a) Berechnen Sie für die Hohlprofile P1-P3 die Torsionswiderstandsmomente W_T und ordnen Sie diese der Größe nach.

b) Ermitteln Sie den Radius R, den das Vollkreisprofil 4 haben muss, damit es das gleiche Torsionswiderstandsmoment wie Profil 2 besitzt.

In einem Schnitt treten Schnittgrößen $M_y = 20a \cdot F$, $Q_z = F$, $M_T = 2a \cdot F$ auf.

c) Berechnen Sie in Profil P1 und P3 im Punkt A die Schubspannung infolge Querkraft und Torsion.

d) Berechnen Sie in Profil 2 und 4 die maximale Normalspannung.

Gegeben: a, F

Hinweis: Für $t \ll a$ gilt

$$I_y = \frac{2}{3}\,d^3 t \quad S_y^A = \frac{3}{4}\,d^2 t \qquad\qquad I_y = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,c^3 t \quad S_y^A = \sqrt{2}\,c^2 t$$

Aufgabe 3

a) Da für die Hohlprofile P1 bis P3 die Dicke $t_{min} = \frac{1}{16}a$ gleich ist, kann das Torsionswiderstandsmoment $W_T = 2\ A_m\ t_{min}$ direkt angegeben werden:

$$\text{Profil P1:} \quad W_{T,1} = 2 \cdot (4a)^2 \cdot \frac{a}{16} = 2\ a^3$$
$$\text{Profil P2:} \quad W_{T,2} = 2 \cdot \pi(2a)^2 \cdot \frac{a}{16} = \frac{\pi}{2}a^3$$
$$\text{Profil P3:} \quad W_{T,3} = 2 \cdot (\sqrt{2}\ 2a)^2 \cdot \frac{a}{16} = a^3$$

Ordnung nach der Größe:

$$W_{T,3} < W_{T,2} < W_{T,1}$$

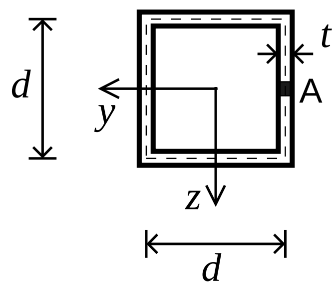
b) Das Torsionswiderstandsmoment für das Vollprofil ist

$$W_{T,4} = \frac{I_{T,4}}{r_{max}} = \frac{\pi R^4}{2}\frac{1}{R} = \frac{\pi R^3}{2}$$

und durch Gleichsetzen mit $W_{T,2}$ erhält man

$$W_{T,4} \stackrel{!}{=} W_{T,2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi}{2}a^3 \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt[3]{a^3} = a$$

c) Profil P1
Die Flächenmomente 1. und 2. Ordnung können mit dem Hinweis berechnet werden



$$S_y^A = \frac{3}{4}\ d^2 t = \frac{3}{4}\ (4a)^2 t = \frac{3}{4}a^3$$

$$I_y = \frac{2}{3}\ d^3 t = \frac{2}{3}(4a)^3\frac{a}{16} = \frac{8}{3}a^4$$

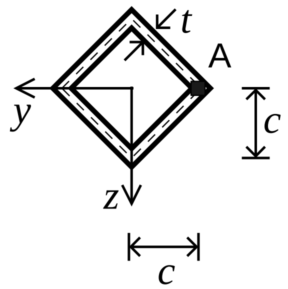
Die Schubspannung infolge Querkraft in Punkt A ergibt sich zu

$$\underline{\underline{\tau_Q^A}} = \frac{Q_z\ S_y^A}{I_y\ b} = \frac{F \cdot \frac{3}{4}a^3}{\frac{8}{3}a^4 \cdot\ 2 \cdot \frac{a}{16}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}\frac{F}{a^2}}}$$

Die Schubspannung infolge Torsion wird mit der 1. Bredtschen Formel und dem Torsionswiderstandsmoment aus Aufgabenteil a) berechnet

$$\underline{\underline{\tau_{T,max}^A}} = \frac{T}{t_{min}} = \frac{M_T}{2\ A_m\ t_{min}} = \frac{M_T}{W_{T,1}} = \frac{F \cdot 2a}{2a^3} = \underline{\underline{\frac{F}{a^2}}}$$

Analog für <u>Profil P3</u>



$$S_y^A = \sqrt{2}\ c^2 t = \sqrt{2}\ (2a)^2 \cdot \frac{a}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4} a^3$$

$$I_y = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ c^3 t = \frac{4}{3}\sqrt{2} \cdot (2a)^3 \cdot \frac{a}{16} = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^4$$

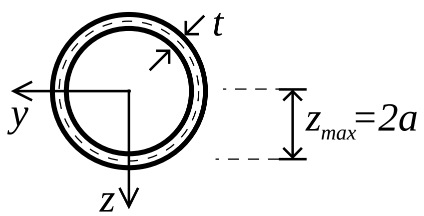
Schubspannung infolge Querkraft in Punkt A

$$\underline{\underline{\tau_Q^A}} = \frac{Q_z\ S_y^A}{I_y\ b} = \frac{F \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} a^3}{\frac{2\sqrt{2}}{3} a^4 \cdot\ 2 \cdot \sqrt{2} \frac{a}{16}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{F}{a^2}}}$$

Die Schubspannung infolge Torsion wird mit der 1. Bredtschen Formel und dem Torsionswiderstandsmoment aus Aufgabenteil a) berechnet

$$\underline{\underline{\tau_{T,max}^A}} = \frac{T}{t_{min}} = \frac{M_T}{2\ A_m\ t_{min}} = \frac{M_T}{W_{T,3}} = \frac{F \cdot 2a}{a^3} = \underline{\underline{2\ \frac{F}{a^2}}}$$

d) <u>Profil P2</u>

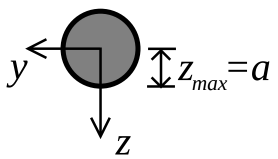


$$I_{y,2} = \pi r_m^3 \cdot t = \pi \cdot (2a)^3 \cdot \frac{a}{16} = \frac{\pi}{2} a^4$$

Die Normalspannung infolge Biegung ist am unteren Rand maximal

$$\underline{\underline{\sigma_{max,P2}}} = \sigma(z = 2a) = \frac{F \cdot 20a}{\frac{\pi}{2} a^4} \cdot 2a = \underline{\underline{\frac{80}{\pi} \frac{F}{a^2} \approx 25,46 \frac{F}{a^2}}}$$

<u>Profil P4</u>

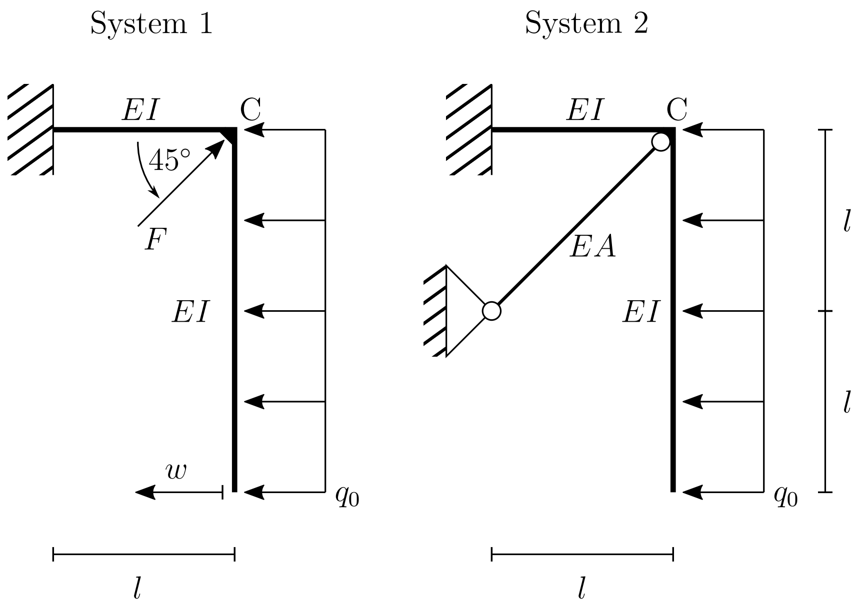


$$I_{y,4} = \pi \frac{r^4}{4} = \pi \frac{(a)^4}{4} = \frac{\pi}{4} a^4$$

Die Normalspannung infolge Biegung ist am unteren Rand maximal

$$\underline{\underline{\sigma_{max,P4}}} = \sigma(z = a) = \frac{F \cdot 20a}{\frac{\pi}{4} a^4} \cdot a = \underline{\underline{\frac{80}{\pi} \frac{F}{a^2} \approx 25,46 \frac{F}{a^2}}}$$

4. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)



Gegeben ist der abgewinkelte Kragarm mit der Biegesteifigkeit EI. Die Dehnsteifigkeit im Balken soll vernachlässigt werden.

Lösen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte folgende Teilaufgaben.

a) Berechnen Sie in System 1 die Kraft F so, dass die Verschiebung w gleich Null ist.

b) In System 2 ist die im Stab übertragene Kraft zu berechnen.

c) Geben Sie für den Fall, dass im Stab die Kraft $S = -\sqrt{2} \cdot ql$ übertragen wird die erforderliche Querschnittsfläche A an.

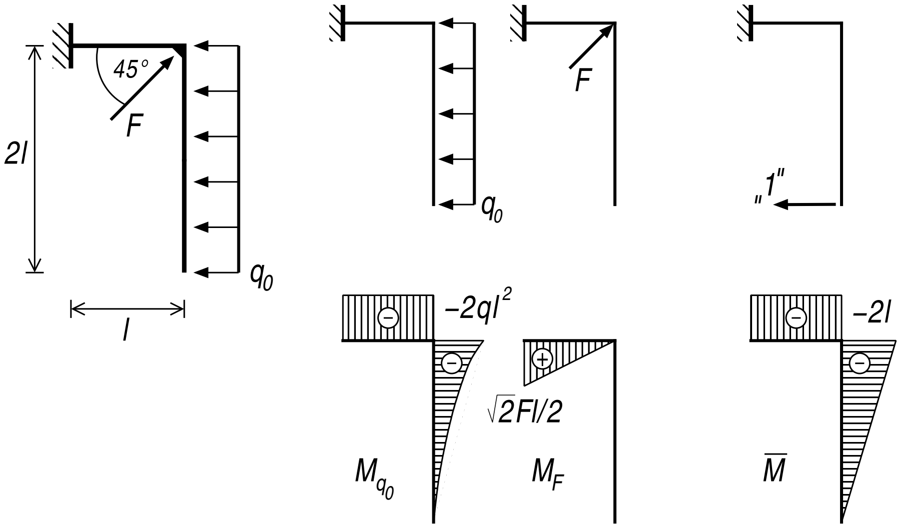
d) Beeinflusst der Stab das in der Ecke C übertragene Biegemoment? Geben für beide Systeme das Biegemoment in der Ecke C an.

Gegeben: l, E, I, q_0

Hinweis: $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 4

a) Die Schnittgrößen infolge der äußeren Belastung können superponiert $M = M_{q_0} + M_F$ angegeben werden. Für die Berechnung der Verschiebung w wird eine virtuelle Last „1“ aufgebracht.



Die Verschiebung wird mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte berechnet.

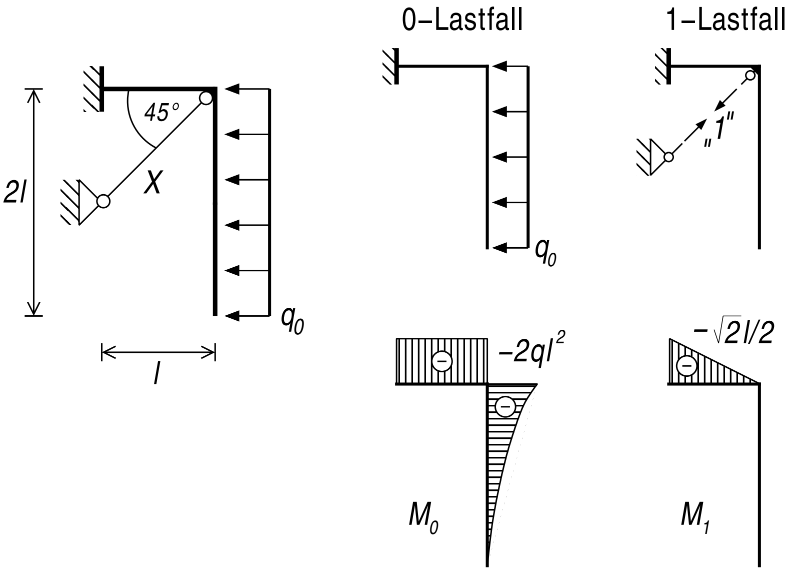
$$
\begin{aligned}
w &= \frac{1}{EI}\int M\bar{M}\;dx = \frac{1}{EI}\int (M_{q_0}+M_F)\bar{M}\;dx \\
&= \frac{1}{EI}\left((-2ql^2)(-2l)\cdot l + \frac{1}{4}(-2ql^2)(-2l)\cdot 2l + \frac{1}{2}(Fl\frac{\sqrt{2}}{2})(-2l)\cdot l\right) \\
&= \frac{1}{EI}\left(6\;ql^4 - Fl^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Die Forderung, dass die Verschiebung verschwindet liefert die gesuchte Kraft.

$$
w \overset{!}{=} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 6\;ql = \frac{\sqrt{2}}{2}F \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{F = 6\sqrt{2}ql}}
$$

b) Das System ist einfach statisch unbestimmt, und die die Kraft im Stab kann als statisch Unbestimmte gewählt werden. Die α_{ik} zur Berechnung der statisch Überzähligen $X = -\alpha_{10}/\alpha_{11}$ werden mit der Integraltafel bestimmt.

Mit den Schnittgrößen im 0- und 1-Lastfall



Für α_{10} (Konstanter Verlauf mit Dreieck), und α_{11} (Dreieck mit Dreieck)

$$\alpha_{10} = \int \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI}\,\frac{1}{2}(-2ql^2)(\frac{-\sqrt{2}}{2}l)\cdot l = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{ql^4}{EI}$$

$$\alpha_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI}dx + \int \frac{N_1^2}{EA}dx = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2}l)^2 + \frac{1}{EA}\cdot 1\cdot 1\cdot\sqrt{2}l$$

$$= \frac{l^3}{6\;EI} + \frac{\sqrt{2}\;l}{EA}$$

Die unbekannte Stabraft wird

$$\Rightarrow X = \underline{\underline{S}} = \frac{-\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \underline{\underline{\frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{ql^4}{EI}}{\dfrac{l^3}{6\;EI} + \dfrac{\sqrt{2}\;l}{EA}}}}$$

c) Für den Fall, dass im Stab die Kraft $S = -\sqrt{2}F$ übertragen wird gilt

$$S \stackrel{!}{=} -\sqrt{2}F \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{ql^4}{EI} \;= -\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{ql^4}{EI} - 2\frac{ql^2}{EA} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\sqrt{2}l^2}{3}\frac{l^2}{I} = -\frac{2}{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\frac{6}{\sqrt{2}}\frac{I}{l^2} = 3\sqrt{2}\frac{I}{l^2}}}$$

d) Moment in Punkt C

in System 1: $\quad M^C = M^C_{q_0} + M^C_F = -2ql^2 + 0 = -2ql^2$

in System 2: $\quad M^C = M^C_0 + X\cdot M^C_1 = -2ql^2 + X\cdot 0 = -2ql^2$

Der Stab hat keinen Einfluss auf das Biegemoment in der Ecke C.