Modulprüfung

Dynamik

15. März 2023

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

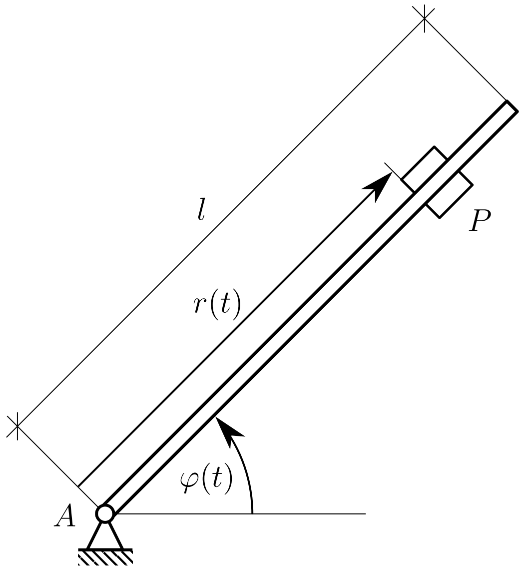
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 21 % der Gesamtpunkte)



Eine Stange der Länge l rotiert gemäß dem Gesetz $\varphi(t) = \lambda t^2$ um den Punkt A. Auf der Stange bewegt sich ein Punkt P gemäß dem Gesetz $r(t) = l(1 - \lambda t^2)$.

Geg.: l, λ

a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitvektor und den Beschleunigungsvektor des Punkts P für $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

b) Bei welchem Winkel φ_A stößt der Punkt P am Lager A an ?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Polarkoordinaten:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

Differenzieren der Gesetzmäßigkeiten aus der Angabe liefert:

$$r = l(1-\lambda t^2), \quad \dot{r} = -2l\lambda t, \quad \ddot{r} = -2l\lambda$$
$$\varphi = \lambda t^2, \quad \dot{\varphi} = 2\lambda t, \quad \ddot{\varphi} = 2\lambda$$

Zeit t^* für den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$\varphi(t^*) = \lambda t^{*2} \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \; t^* = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Einsetzen der Zeit t^* in diese Terme liefert:

$$r(t^*) = l\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \;, \quad \dot{r}(t^*) = -l\sqrt{\lambda\pi} \;, \quad \ddot{r}(t^*) = -2l\lambda$$
$$\varphi(t^*) = \frac{\pi}{4} \;, \quad \dot{\varphi}(t^*) = \sqrt{\lambda\pi} \;, \quad \ddot{\varphi}(t^*) = 2\lambda$$

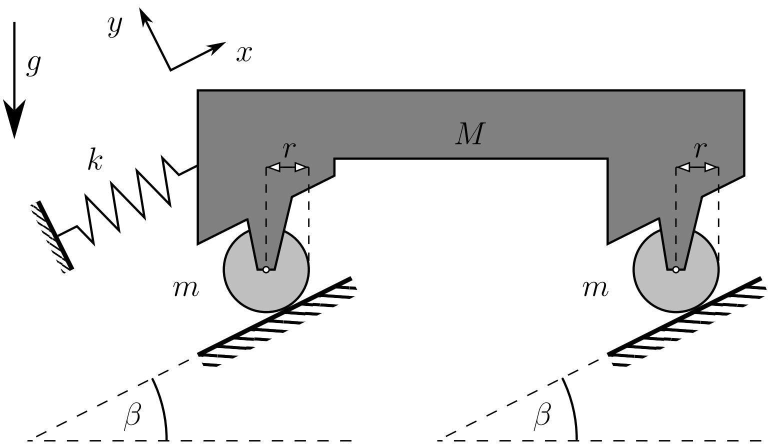
Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor zum Zeitpunkt t^*:

$$\boldsymbol{v}(t^*) = \left[-l\sqrt{\lambda\pi}\right]\boldsymbol{e}_r + \left[l\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\lambda\pi}\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a}(t^*) = \left[-2l\lambda - l\lambda\pi + \frac{1}{4}l\lambda\pi^2\right]\boldsymbol{e}_r + \left[2l\lambda - \frac{5}{2}l\lambda\pi\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

b) Zeit, zu der P am Lager A anstößt:

$$r(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \; t = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \Rightarrow \; \varphi_A = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 1 \quad \Rightarrow \; \varphi_A = 1 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ$$

2. Aufgabe: (ca. 32 % der Gesamtpunkte)



Das abgebildete Fahrzeug der Masse M bewegt sich auf zwei zylindrischen Walzen (jeweils mit der Masse m und dem Radius r), die auf einer um β geneigten Ebene rollen. Eine ebenfalls um β geneigte Feder der Steifigkeit k sichert das Fahrzeug.

Geg.: M, $m = M/3$, k, r, $0 \leq \beta < 90°$, g

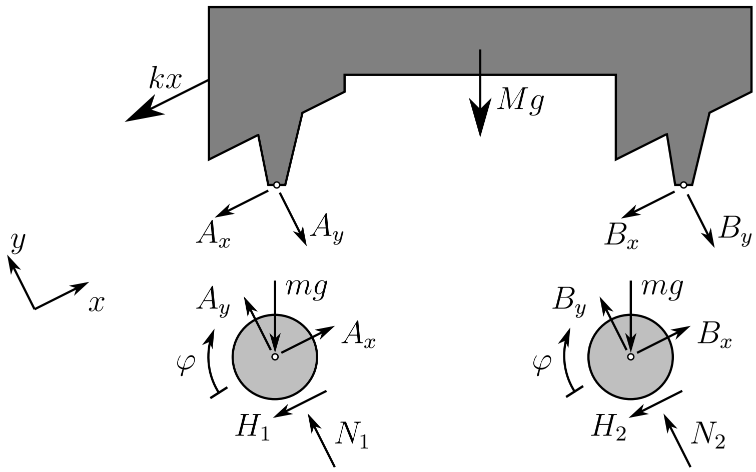
a) Schneiden Sie sämtliche starre Körper des Systems frei und zerlegen Sie alle Kräfte bezüglich des gegebenen x-y-Koordinatensystems.

b) Stellen Sie in der Koordinate x die Bewegungsgleichung des Fahrzeugs unter Verwendung der synthetischen Methode auf.

c) Bestimmen Sie die zeitliche Bewegung $x(t)$ des Fahrzeugs für den Fall, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Feder entspannt und das Fahrzeug in Ruhe ist.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Vollständiger Freischnitt des Systems und Zerlegung der Kräfte in x-y-Richtung:



Komponentenzerlegung der Gewichtskräfte:

$$\begin{aligned}
G_x^{\text{Fahrzeug}} &= -Mg \cdot \sin\beta \\
G_y^{\text{Fahrzeug}} &= -Mg \cdot \cos\beta \\
G_x^{\text{Rad links}} &= G_x^{\text{Rad rechts}} = -mg \cdot \sin\beta \\
G_y^{\text{Rad links}} &= G_y^{\text{Rad rechts}} = -mg \cdot \cos\beta
\end{aligned}$$

Alle anderen Kräfte sind bereits in x- bzw. y-Richtung freigeschnitten.

b) Aufstellen der Bewegungsgleichung

Massenträgheitsmoment Rad:

$$\Theta_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}mr^2$$

Kinematik:

$$\varphi = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

Betrachtung Rad links (rechts analog):

$$\sum M_i^{\mathrm{S}} = \Theta_{\mathrm{S}}\ddot{\varphi}: \quad H_1 r = \frac{1}{2}mr^2\frac{\ddot{x}}{r} \quad \Leftrightarrow \quad H_1 = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

$$\sum F_{ix} = m\ddot{x}: \quad A_x - H_1 - mg \cdot \sin\beta = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad A_x = \frac{3}{2}m\ddot{x} + mg \cdot \sin\beta$$

Analog Rad rechts:

$$B_x = \frac{3}{2}m\ddot{x} + mg \cdot \sin\beta$$

Betrachtung am Fahrzeug:

$$\begin{aligned}
\sum F_{ix} = M\ddot{x}: \quad & -A_x - B_x - kx - Mg \cdot \sin\beta = M\ddot{x} \\
\Leftrightarrow \quad & (3m + M)\ddot{x} + kx = -(M + 2m)g \cdot \sin\beta \\
\Leftrightarrow \quad & 2M\ddot{x} + kx = -\frac{5}{3}Mg \cdot \sin\beta
\end{aligned}$$

c) Aufstellen der Bewegung $x(t)$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_\mathrm{H}(t) + x_\mathrm{P}(t)\\
x_\mathrm{H}(t) &= A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\\
x_\mathrm{P}(t) &= C
\end{aligned}
$$

Partikulärlösung in DGL einsetzen liefert:

$$kC = -\frac{5}{3}Mg\sin\beta \qquad \Rightarrow C = -\frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta$$

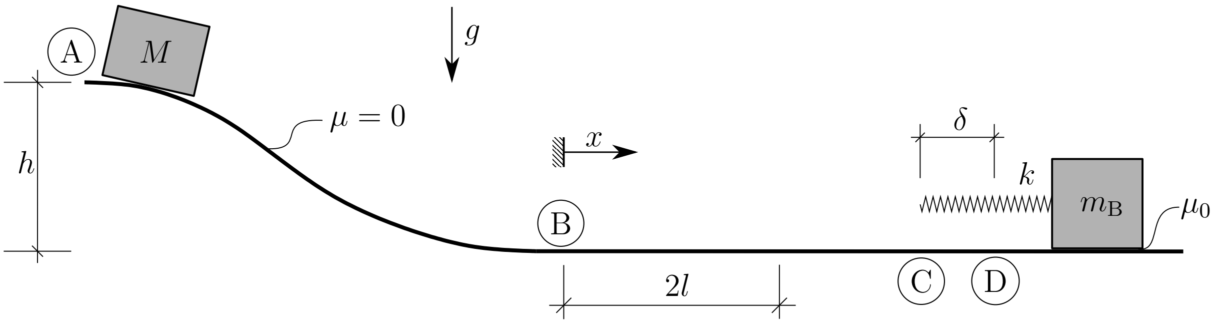
(alternativ mit statischer Ruhelage: $x_0 = -\frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta \mathrel{\widehat{=}} C$)

$$\Rightarrow \; x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) - \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta$$

Anfangsbedingungen: $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t=0) = 0: \quad A = 0\\
&x(t=0) = 0: \quad B = \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta\\
\Rightarrow \quad & x(t) = \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta\cos(\omega t) - \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta \qquad \text{mit } \omega^2 = \frac{k}{2M}
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe: (ca. 21 % der Gesamtpunkte)



Zum Rangieren von Eisenbahnwagen wird ein Ablaufberg eingesetzt. Ein Wagen der Masse M hat in Punkt A die Anfangsgeschwindigkeit v_A. Er fährt den Berg der Höhe h hinunter und wird dann auf einer Strecke $2l$ (gemessen ab Punkt B) mit einer Kraft

$$\boldsymbol{F}(x) = -\frac{3Mg}{64h^2}\,x^2\,\boldsymbol{e}_x, \quad 0 \leq x \leq 2l$$

abgebremst. In Punkt C fährt der Wagen auf die abgebildete Bremsvorrichtung. Diese besteht aus einer Feder und einem Bremsklotz, der mit μ_0 am Untergrund haftet.

Geg.: h, $l = 2h$, M, $m_\text{B} = 2M$, v_C, g, μ_0

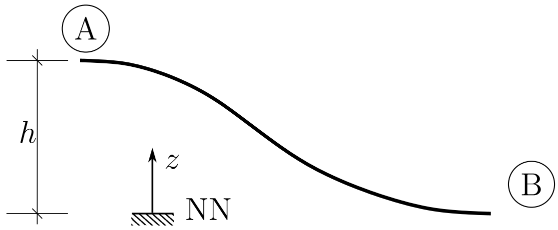
a) Berechnen Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Anfangsgeschwindigkeit v_A, sodass der Wagen in Punkt C die Geschwindigkeit $v_C = \sqrt{gh}$ hat.

b) Welche Länge δ muss der Federweg mindestens haben, damit der Bremsklotz der Masse m_B nicht gleitet? Wie groß ist in diesem Fall die Federsteifigkeit k? Stellen Sie zuerst das Gleichgewicht für den Bremsklotz auf und setzen Sie darin die Bedingung ein, dass die kinetische Energie vollständig in die Verformung der Feder übergeht.

Hinweis: Der als Massenpunkt anzusehende Wagen bewegt sich zwischen A und D ohne Reibung.

Musterlösung - Aufgabe 3

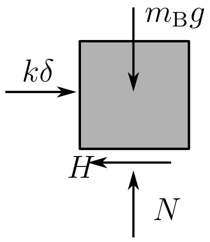
a) Wahl Nullniveau:



Arbeitssatz zwischen Punkt A und Punkt C:

$$T_A + V_A + W|_A^C = T_C + V_C$$
$$\frac{1}{2}Mv_A^2 + Mgh - \int_0^{2l} \frac{3Mg}{64h^2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Mv_C^2 + 0$$
$$\frac{1}{2}v_A^2 + gh - \underbrace{\frac{g}{64h^2}(4h)^3}_{=gh} = \frac{1}{2}v_C^2$$
$$\Rightarrow v_A = v_C = \sqrt{gh}$$

b) Freischnitt Bremsklotz:

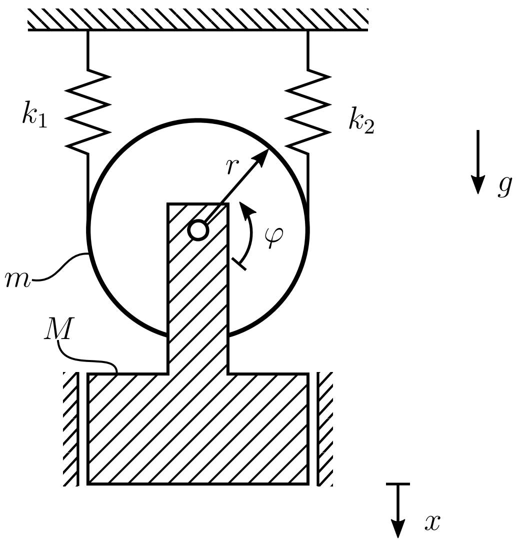


$$\uparrow:\ N = m_\mathrm{B}g = 2Mg$$
$$\rightarrow:\ H = k\delta$$
$$\text{Coulombsche Haftung: } H \leq \mu_0 N$$
$$\Rightarrow\ k\delta \leq \mu_0 2Mg \quad (1)$$

Energiebilanz (kin. Energie geht komplett in Federenergie über):

$$T_C = V_\mathrm{Feder} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}Mv_C^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad \Leftrightarrow \quad k\delta = \frac{Mv_C^2}{\delta}$$
$$(1): \quad \frac{Mv_C^2}{\delta} \leq 2\mu_0 Mg \quad \Leftrightarrow \quad \delta \geq \frac{h}{2\mu_0}$$
$$\Rightarrow\ k = \frac{2\mu_0 Mg}{\delta} = \frac{4\mu_0^2 Mg}{h}$$

4. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte System besteht aus einer homogenen Rolle (Radius r, Masse m) und einer **gelenkig** angebrachten Nutzlast mit Masse M. Die Rolle ist über ein Seil mit zwei Federn (Federsteifigkeit k_1 bzw. k_2) verbunden, wobei zwischen Rolle und Seil **kein Gleiten** stattfindet. Verwenden Sie zur Bearbeitung der Aufgabe die vorgegebenen Freiheitsgrade x und φ. Im Gleichgewichtszustand gelte $x = 0$ und $\varphi = 0$.

Geg.: M, m, k_1, k_2, r, g.

a) Stellen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Systems auf.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe der Methode nach Lagrange.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{Rot}}^{\text{Rolle}} + T_{\text{Trans}}^{\text{Rolle}} + T_{\text{Trans}}^{\text{Klotz}} \\ &= \frac{1}{2}\Theta_{\text{S}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \\ &\text{mit MTM } \Theta_{\text{S}} = \frac{1}{2}mr^2 \end{aligned}$$

potentielle Energie (keine Lageenergie, da Schwingung um stat. Ruhelage):

$$\begin{aligned} V &= V^{\text{Feder1}} + V^{\text{Feder2}} \\ &= \frac{1}{2}k_1(x+r\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_2(x-r\varphi)^2 \end{aligned}$$

b) Methode nach Lagrange:

x-Komponente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m+M)\dot{x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) &= (m+M)\ddot{x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= k_1(x+r\varphi) + k_2(x-r\varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (m+M)\ddot{x} + k_1(x+r\varphi) + k_2(x-r\varphi) = 0$$

φ-Komponente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= k_1 r(x+r\varphi) - k_2 r(x-r\varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi} + k_1 r(x+r\varphi) - k_2 r(x-r\varphi) = 0$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} m+M & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & (k_1-k_2)r \\ (k_1-k_2)r & (k_1+k_2)r^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$