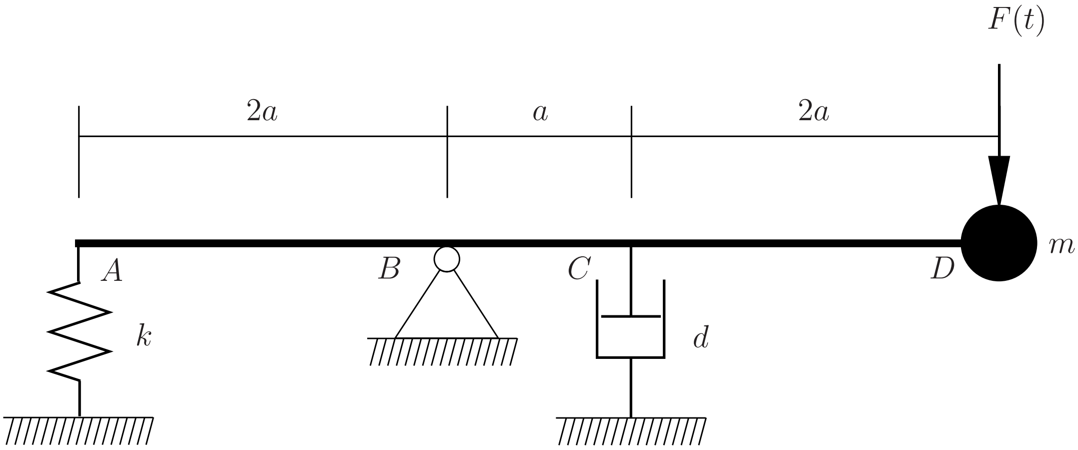
Institut für Mechanik	Prüfung
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Baudynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	25. Juli 2016

Aufgabe 1

Ein masseloser und starrer Stab ist im Punkt B drehbar gelagert und wird am Punkt A durch eine Feder der Steifigkeit k gehalten. Am Punkt C ist ein Dämpfer der Dämpfungskonstante d vorhanden. Am Punkt D greift eine Punktmasse m und eine zeitlich veränderliche Last $F(t)$ an.



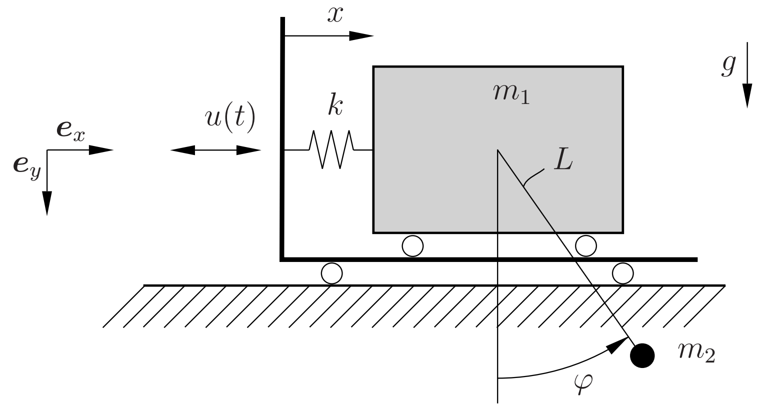
Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem im Punkt B und schneiden Sie das System frei.
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mittels der synthetischen Methode auf
c) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Deformationen
d) Berechnen Sie das Lehr'sche Dämpfungsmaß sowie die Eigenkreisfrequenz

Gegeben: $a,\ m,\ k,\ d,\ \Omega,\ t,\ F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$

Aufgabe 2

Das gegebene System mit zwei Freiheitsgraden besteht aus einem masselosen Rahmen und einem Klotz mit der Masse m_1, die mit reibungsfreien Rollen verbunden sind. Ein Pendel der Masse m_2 ist über einen starren und masselosen Stab mit dem Klotz verbunden. Angeregt wird das System durch eine zeitlich veränderliche Verschiebung $u(t) = u_0 \cos(\Omega t)$.



Die Bewegungsgleichungen sollen mit der Methode nach Lagrange bestimmt werden.

a) Führen Sie generalisierte Koordinaten ein, ermitteln Sie die nichtlinearen Ortsvektoren und die nichtlinearen Energien T und V.
b) Geben Sie die Berechnungsvorschriften der Lagrange'schen Energie sowie des Lagrange'schen Formalismus zweiter Art an.

Aus dem Lagrange'schen Formalismus erhält man nun die folgenden nichtlinearen Bewegungsgleichungen.

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 L \cos(\varphi)\ddot{\varphi} + kx - m_2 L \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) = (m_1 + m_2) u_0 \Omega^2 \cos(\Omega t)$$
$$m_2 L \cos(\varphi)\ddot{x} + m_2 L^2 \ddot{\varphi} + m_2 g L \sin(\varphi) = m_2 L \cos(\varphi) u_0 \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

c) Linearisieren Sie die gegebene Bewegungsgleichungen für kleine (x, $\dot{x}$, φ, $\dot{\varphi}$) und geben Sie diese in Matrixschreibweise an.
d) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems.
e) Ermitteln Sie die Schwingungsamplituden im eingeschwungengen Zustand für die gegebene Erregung $u(t) = u_0 \cos(\Omega t)$.
f) Die Masse m_2 soll als Schwingungstilger wirken. Bei welcher Erregerfrequenz Ω befindet sich der Klotz in Ruhe?

Gegeben: $u_0,\ u(t) = u_0 \cos(\Omega t),\ m_1,\ m_2,\ k,\ L,\ g$

Modulprüfung Baudynamik
am 25. Juli 2016

Baudynamik

Lösungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich und lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur gewertet, wenn sie auf der ausgegebenen Lösungsvorlage bearbeitet wurden. Abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Beschriften Sie die Blätter der Lösungsvorlagen nur auf der Vorderseite.
- Der Lösungsweg der Aufgaben muss eindeutig erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht gewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine gewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.

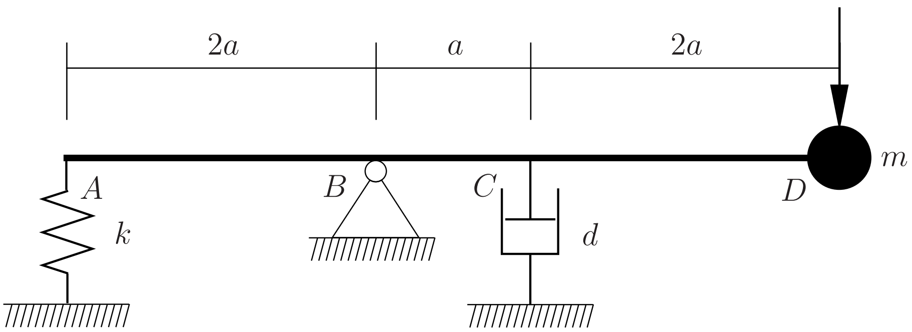
Aufgabe	1	2	$\sum$
Punkte	7	18	25
Korrektor			

(Eintrag erfolgt durch Institut)

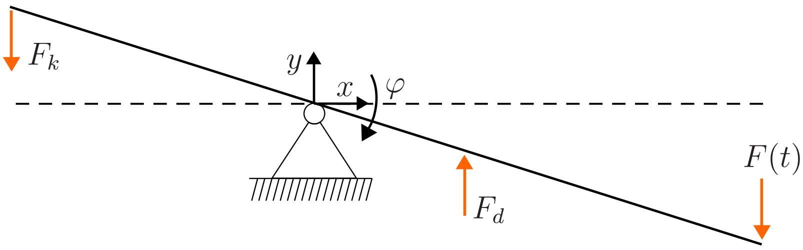
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

1. Aufgabe

a) Koordinatensystem Einführen + Freischnitt



System



Freischnitt

$$
\begin{aligned}
F_k &= k\,2a\sin(\varphi)\\
F_d &= d\,\dot{y}_d = d\,a\cos(\varphi)\dot{\varphi}\\
F(t) &= F_0\cos(\Omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{mit } y_d &= a\sin(\varphi)\\
\dot{y}_d &= a\cos(\varphi)\dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

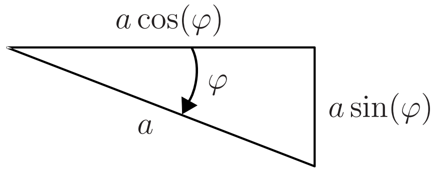


Abb. 1.3: Geometrie

b) Drallsatz: (Positiv in φ-Richtung)

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_B &= J_B\,\ddot{\varphi}\\
J_B &= m(3a)^2 = 9\,ma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -F_k\, 2a\cos(\varphi) - F_d\, a\cos(\varphi) + F(t)3a\cos(\varphi) = J_B\ddot{\varphi}\\
&\Leftrightarrow -k2a2a\sin(\varphi)\cos(\varphi) - da\cos(\varphi)\dot{\varphi}a\cos(\varphi) + F_0\cos(\Omega t)3a\cos(\varphi) = 9ma^2\ddot{\varphi}\\
&\Leftrightarrow -k4a^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - da^2\cos^2(\varphi)\dot{\varphi} + F_0\, 3a\cos(\Omega t)\cos(\varphi) = 9ma^2\ddot{\varphi}\\
&\Leftrightarrow 9ma^2\ddot{\varphi} + da^2\cos^2(\varphi)\dot{\varphi} + 4ka^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 3F_0 a\cos(\Omega t)\cos(\varphi)\\
&\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{d\cos^2(\varphi)}{9m}\dot{\varphi} + \frac{4k\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{9m} = \frac{F_0\cos(\Omega t)\cos(\varphi)}{3ma}
\end{aligned}
$$

c) Linearisierung DGL mit:

$$
\begin{aligned}
\varphi \ll 1 \Rightarrow \sin(\varphi) &\approx \varphi\\
\Rightarrow \cos(\varphi) &\approx 1
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{d}{9m}\dot{\varphi} + \frac{4k}{9m}\varphi = \frac{F_0\cos(\Omega t)}{3ma}
$$

d) Mit Eigenkreisfrequenz und Lehr'sches Dämpfungsmaß:

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \frac{4k}{9m}\\
\omega_1 &= \sqrt{\frac{4k}{9m}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\\
\frac{d}{9m} &= 2\,D\,\omega_1 \Leftrightarrow D = \frac{d}{18m\,\omega_1} = \frac{d}{18m\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}} = \underline{\underline{\frac{d}{12\sqrt{km}}}}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe

a) Generalisierte Koordinaten:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Ortsvektoren:

$$\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} u(t) + x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \cos(\Omega t) + x \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} u(t) + x + \sin(\varphi) \\ l\cos(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \cos(\Omega t) + x + l\sin(\varphi) \\ l\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

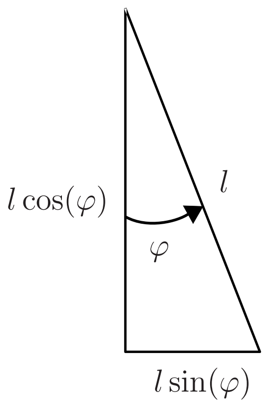


Abb. 2.1: Geometrie

Zeitableitung Ortsvektoren:

$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} -u_0\Omega\sin(\Omega t) + \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{2} = \begin{bmatrix} -u_0\Omega\sin(\Omega t) + \dot{x} + l\,\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ -l\,\dot{\varphi}\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

Quadrate der Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (-u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t) + \dot{x})^2 \\ &= u_0^2\,\Omega^2\,\sin^2(\Omega t) - 2u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)\dot{x} + \dot{x}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (-u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t) + \dot{x} + l\,\dot{\varphi}\cos(\varphi))^2 + (-l\,\dot{\varphi}\,\sin(\varphi))^2 \\ &= u_0^2\,\Omega^2\,\sin^2(\Omega t) + \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) + 2(-u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)\dot{x} - u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)l\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ &\qquad + \dot{x}l\,\dot{\varphi}\cos(\varphi)) + l^2\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2(\varphi) \\ &= u_0^2\,\Omega^2\,\sin^2(\Omega t) + \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2\,\underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{=1} \\ &\qquad - 2\,u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)(\dot{x} + l\,\dot{\varphi}\cos(\varphi)) + 2\dot{x}l\,\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ &= u_0^2\,\Omega^2\,\sin^2(\Omega t) + \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2 - 2\,u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)(\dot{x} + l\,\dot{\varphi}\cos(\varphi)) + 2\dot{x}l\,\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ &= u_0^2\,\Omega^2\,\sin^2(\Omega t) + \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\cos(\varphi)(\dot{x} - u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)) - 2u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)\dot{x} \end{aligned}$$

Energien:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1(u_0^2\,\Omega^2\,\sin^2(\Omega t) - 2u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)\dot{x} + \dot{x}^2) + \frac{1}{2}m_2(u_0^2\,\Omega^2\,\sin^2(\Omega t) + \dot{x}^2 + l^2\,\dot{\varphi}^2 \\
&\quad + 2l\dot{\varphi}\cos(\varphi)(\dot{x} - u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t))) - 2u_0\,\Omega\,\sin(\Omega t)\dot{x} \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(u_0^2\Omega^2\sin^2(\Omega t) - 2u_0\Omega\sin(\Omega t)\dot{x} + \dot{x}^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\cos(\varphi)(\dot{x} - u_0\Omega\sin(\Omega t))
\end{aligned}
$$

$$
V = \frac{1}{2}\,kx^2 + m_2\,g\,l(1 - \cos(\varphi))
$$

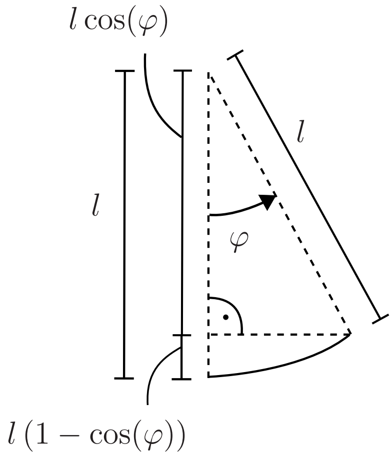


Abb. 2.2: Geometrie

b) Lagrange Formalismus mit $L = T - V$

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2)
$$

c) Linearisierung der gegebenen DGL'en für kleine Auslenkungen mit:

$$
\begin{aligned}
\varphi \ll 1 \Rightarrow \sin(\varphi) &\approx \varphi \\
\cos(\varphi) &\approx 1 \\
\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 &\approx 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\,\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi} + kx &= (m_1 + m_2)\,u_0\,\Omega^2\cos(\Omega t) \\
m_2\,l\,\ddot{x} + m_2\,l^2\,\ddot{\varphi} + m_2 g l\varphi &= m_2\,l\,u_0\,\Omega^2\cos(\Omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2\,l \\ m_2 & m_2\,l^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}
\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}}
+ \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2\,g\,l \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}}
= \underbrace{\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)\,u_0\,\Omega^2\cos(\Omega t) \\ m_2\,l\,u_0\,\Omega^2\cos(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}
$$

d) Eigenfrequenz
charakteristische Gleichung:

$$\det\left(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$
$$\det\begin{pmatrix} k-\omega^2(m_1+m_2) & -\omega^2\,m_2\,l \\ -\omega^2\,m_2\,l & m_2\,g\,l-\omega^2 m_2\,l \end{pmatrix} =$$

$$(k-\omega^2(m_1+m_2))(m_2\,g\,l-\omega^2 m_2\,l)-(-\omega^2\,m_2\,l)(-\omega^2\,m_2\,l) =$$
$$k\,m_2\,g\,l - k\,\omega^2 m_2\,l^2 - \omega^2(m_1+m_2)m_2\,g\,l + \omega^4(m_1+m_2)m_2\,l^2 - \omega^4 m_2^2\,l^2 = 0 \qquad |:l$$
$$\Leftrightarrow k\,m_2\,g - k\,\omega^2 m_2\,l - \omega^2(m_1+m_2)m_2\,g + \omega^4(m_1+m_2)m_2\,l - \omega^4 m_2^2\,l = 0 \qquad |:m_2$$
$$\Leftrightarrow k\,g - \omega^2(k\,l+(m_1+m_2)\,g) + \omega^4((m_1+m_2)l - m_2\,l) = 0$$
$$\Leftrightarrow k\,g - \omega^2(k\,l+(m_1+m_2)\,g) + \omega^4 m_1\,l = 0$$
$$\Leftrightarrow m_1\,l\,\omega^4 - (k\,l+(m_1+m_2)\,g)\,\omega^2 + k\,g = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung in ω^2:

$$\omega_1^2 = \frac{k\,l+(m_1+m_2)\,g+\sqrt{(k\,l+(m_1+m_2)\,g)^2-4m_1 l\,k\,g}}{2m_1\,l}$$
$$\omega_2^2 = \frac{k\,l+(m_1+m_2)\,g-\sqrt{(k\,l+(m_1+m_2)\,g)^2-4m_1 l\,k\,g}}{2m_1\,l}$$

e) Schwingungsamplituden:

Lösungsansatz:

$$x_p = a_1\cos(\Omega t) \qquad \varphi_b = a_2\cos(\Omega t)$$
$$\ddot{x}_p = -a_1\,\Omega^2\cos(\Omega t) \qquad \ddot{\varphi}_b = -a_2\,\Omega^2\cos(\Omega t)$$

einsetzen in DGL'en:

$$(m_1+m_2)(-a_1\,\Omega^2\cos(\Omega t)) + m_2\,l(-a_2\,\Omega^2\cos(\Omega t)) + k\,a_1\cos(\Omega t) = (m_1+m_2)u_0\,\Omega^2\cos(\Omega t)$$
$$m_2\,l(-a_1\,\Omega^1\cos(\Omega t)) + m_2\,l^2(-a_2\,\Omega^2\cos(\Omega t)) + m_2\,g\,l\,a_2\cos(\Omega t) = m_2 l u_0\,\Omega^2\cos(\Omega t)$$

$$(-(m_1+m_2)+k)\,a_1 + m_2\,l\Omega^2\,a_2 = (m_1+m_2)u_0\,\Omega^2$$
$$-\Omega^2\,a_1 + (g-l\,\Omega^2)\,a_2 = u_0\,\Omega^2$$

$\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k-(m_1+m_2)\Omega^2 & -m_2\,l\,\Omega^2 \\ -\Omega^2 & g-l\,\Omega^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)\,u_0\,\Omega^2 \\ u_0\,\Omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} g-l\,\Omega^2 & m_2\,l\,\Omega^2 \\ \Omega^2 & k-(m_1+m_2)\Omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (m_1+m_2)\,u_0\,\Omega^2 \\ u_0\,\Omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= (k-(m_1+m_2)\Omega^2)(g-l\,\Omega^2)-(-\Omega^2)(m_2\,l\,\Omega^2)\\
&= k\,g-k\,l\Omega^2-(m_1+m_2)\,\Omega^2\,g+(m_1+m_2)\,l\,\Omega^4-m_2\,l\,\Omega^4\\
&= k\,g+m_1\,l\,\Omega^4-[k\,l+(m_1+m_2)\,g]\,\Omega^2
\end{aligned}$$

Amplituden:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}((g-l\,\Omega^2)(m_1+m_2)\,u_0\Omega^2+m_2\,l\Omega^2u_0\,\Omega^2)\\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(g(m_1+m_2)\,u_0\Omega^2-l\,\Omega^2(m_1+m_2)\,u_0\Omega^2+m_2\,l\Omega^2u_0\,\Omega^2)\\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(g(m_1+m_2)-l\,\Omega^2\,m_1)\,u_0\,\Omega^2\\
&= \frac{(g(m_1+m_2)-l\,\Omega^2\,m_1)\,u_0\,\Omega^2}{k\,g+m_1\,l\,\Omega^4-[k\,l+(m_1+m_2)\,g]\,\Omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\Omega^2(m_1+m_2)\,u_0\Omega^2+(k-(m_1+m_2)\,\Omega^2)u_0\,\Omega^2)\\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(\Omega^2(m_1+m_2)+k-(m_1+m_2)\,\Omega^2)\,u_0\,\Omega^2\\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,k\,u_0\,\Omega^2\\
&= \frac{k\,u_0\,\Omega^2}{k\,g+m_1\,l\,\Omega^4-[k\,l+(m_1+m_2)\,g]\,\Omega^2}
\end{aligned}$$

f) Schwingungstilgung: Klotz in Ruhe wenn gilt $a_1 \overset{!}{=} 0$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(g(m_1+m_2)-l\,\Omega^2\,m_1)\,u_0\,\Omega^2 = 0\\
&\Leftrightarrow g(m_1+m_2)-l\,\Omega^2\,m_1 = 0\\
&\Leftrightarrow \Omega^2 = \frac{g(m_1+m_2)}{l\,m_1}\\
&\Leftrightarrow \Omega = \sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{l\,m_1}}
\end{aligned}$$