

# Inverse Dynamik: Analyse der Trajektorienplanung anhand eines ebenen Krans

Ferdinand Carl-Amadeus Budau | Bachelorarbeit (2026)

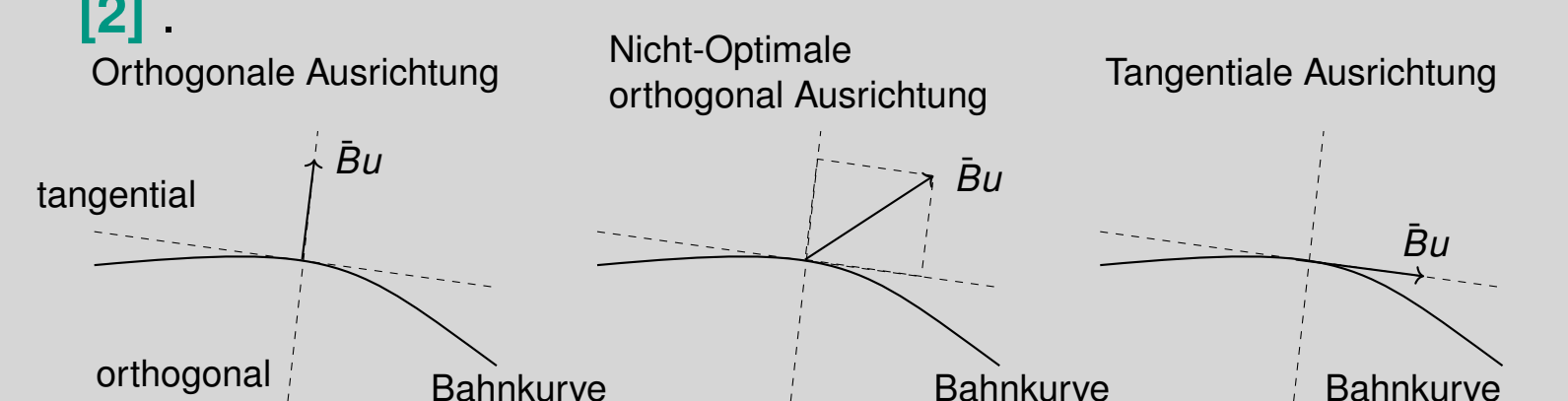
## Einführung

- Diese Arbeit geht der Anwendung des **Prinzips der inversen Dynamik** nach. Hier für wird betrachtet, ob eine von einem Auslegerkran transportierte Masse einer genauen Bewegungskurve folgen kann.
- Es gilt zu beachten, dass die Bewegung der Masse allein von der Kranlaufkatze und deren Seilwinde gesteuert wird. So gilt dieses System als *unteraktuiert*, da die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  der Anzahl der Steuerungsgrößen  $a$  überwiegt.
- Die inverse Dynamik ist ein Gegenstück zu der Vorwärtsdynamik. Es wird der Bewegungsverlauf eines Systems vorgegeben, wofür die aufzubringenden Belastungsgrößen bzw. Steuerungsgrößen zu ermitteln sind.

## Grundlagen

- Die Vorgabe der Bewegung erfolgt mittels algebraischer Gleichungen nach dem Prinzip der **servo constraints** [2]. Es ergibt sich hiermit eine Nebenbedingung der Form
 
$$c(t) = \Phi(q) - \gamma(t) = 0. \quad (1)$$
 Diese bildet ein Zusammenhang der vorgegebenen Bahnkurve (Trajektorie)  $\gamma(t)$  mit den Systemgrößen  $q$  in ihrer Form als generalisierten Koordinaten. Für das hier betrachtete System ergibt sich
 
$$\begin{pmatrix} s + l \sin(\varphi) \\ l \cos(\varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$
- Mit der **flachheitsbasierten Lösung** [Übers. *flatness-based solution*] können die Steuerungsgrößen  $u$  direkt über die Ausgänge  $\gamma(t)$  bestimmt werden [3]. Es ergibt sich demnach der Zusammenhang
 
$$u(t) \Rightarrow u(\gamma(t)). \quad (3)$$

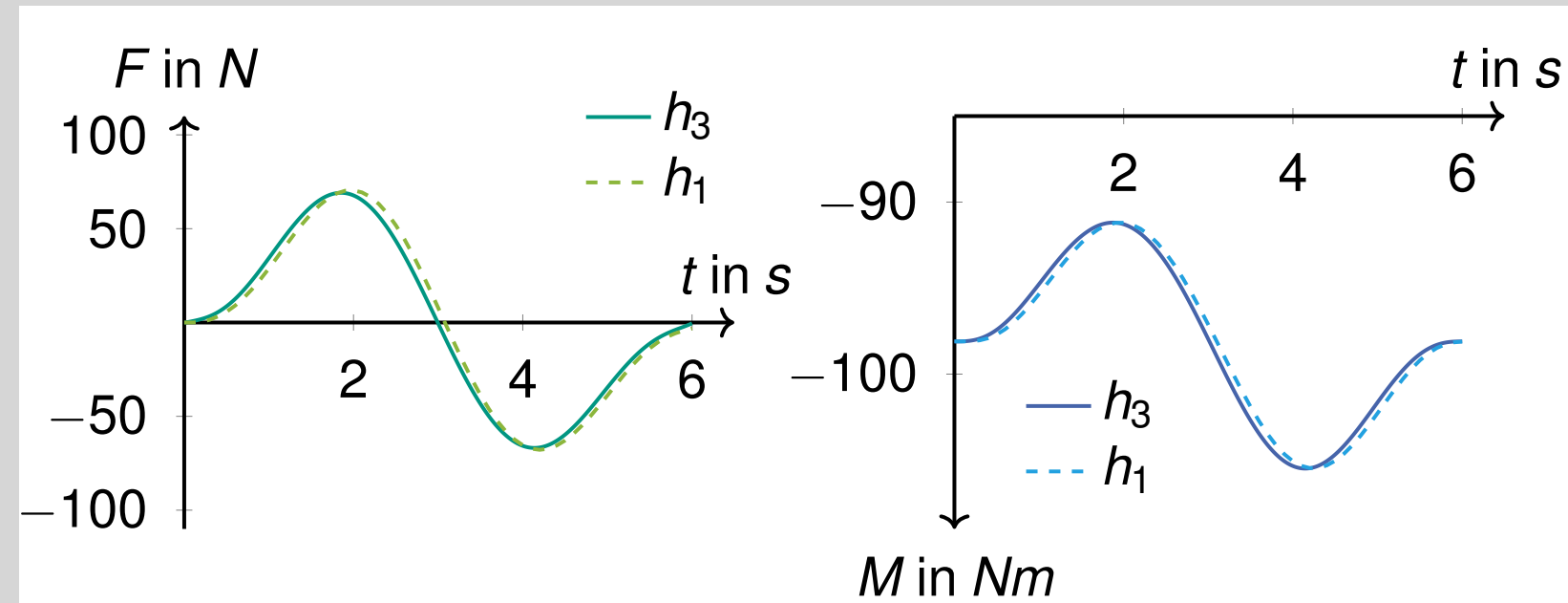
## Projektionsmethode

- Mit den *servo constraints* ergeben sich mögliche geometrische Probleme bei Bestimmung der Steuerungsgrößen. Dies betrifft deren Ausrichtung zur vorgegebenen Bahnkurve [2].
 
- Mittels der Projektionsmethode erfolgt eine Aufteilung in den eingeschränkten Unterraum  $H \in \mathbb{R}^{m \times f}$  mit orthogonaler Ausrichtung zur vorgegebenen Bahnkurve und den uneingeschränkten Unterraum  $D \in \mathbb{R}^{f \times f - m}$  mit tangentialer Ausrichtung zur Bahnkurve [4]. Mit der Bewegungsgleichung ergibt sich
 
$$\begin{pmatrix} H & M^{-1} \\ D & \tau \end{pmatrix} (M \ddot{q} + d - f - B u^T) = 0. \quad (4)$$

## Ergebnisse

### Steuerungsgrößen

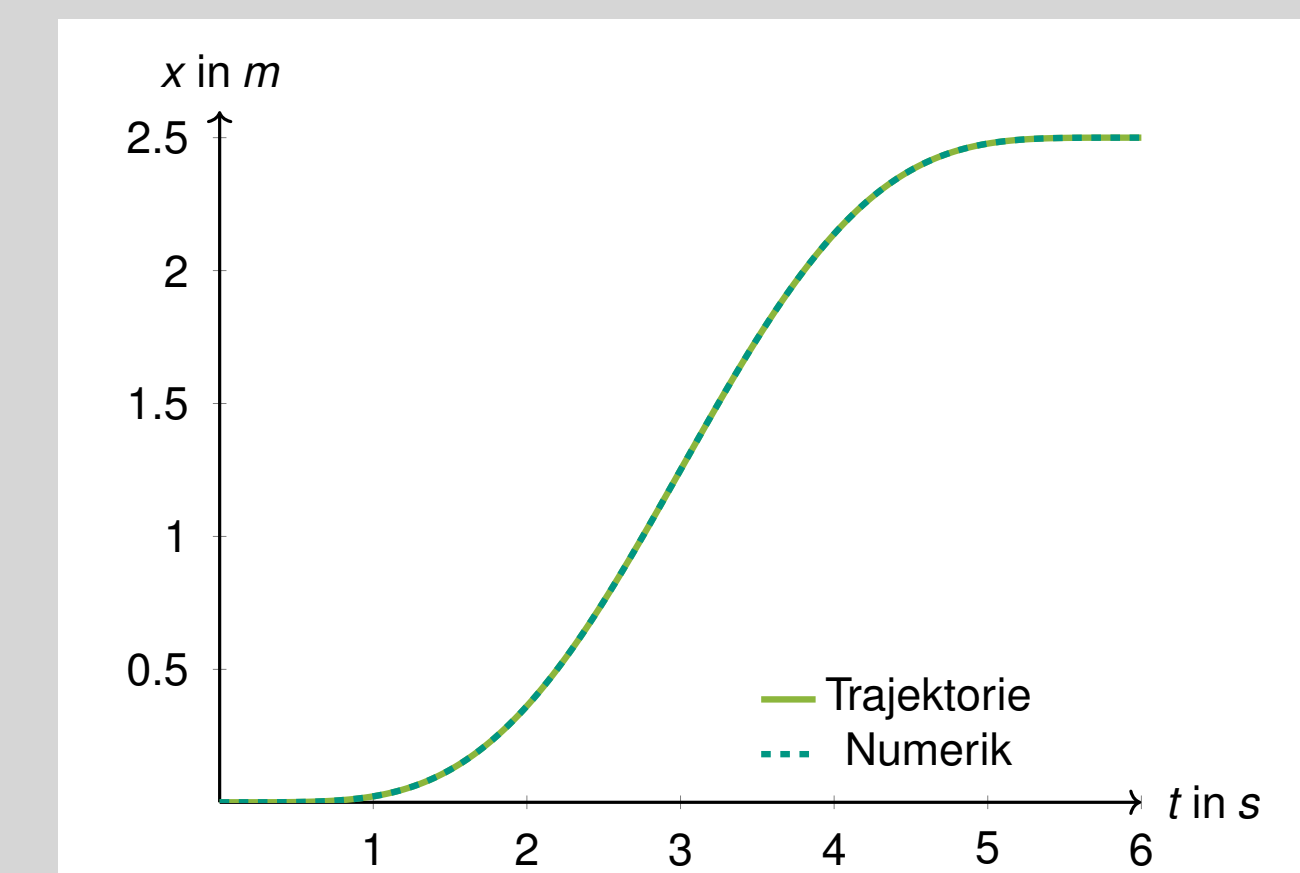
- Es ergeben sich bei den Verläufen der Steuerungsgrößen  $u = [F, M]^T$  wie auch bei den die Systemgrößen  $q = [s, l, \varphi]^T$  je gewählter Genauigkeit bzw. Schrittweite ( $h_1 = 0.1$  s,  $h_3 = 0.01$  s) geringe Unterschiede



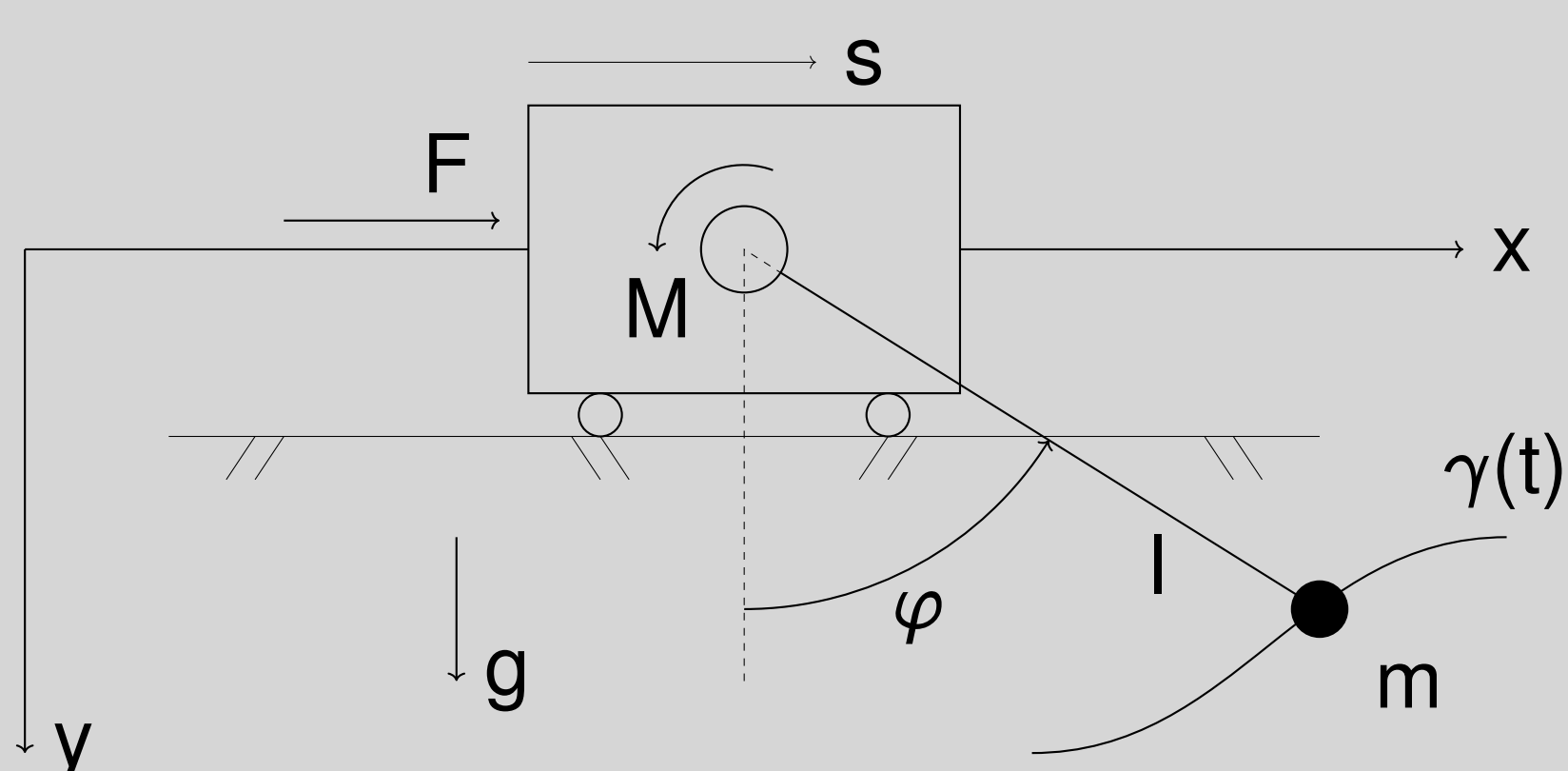
- Mit numerischen Verfahren, wie dem impliziten Euler-Verfahren und einer angepassten Form der Mittelpunktsregel für Differential-algebraische Gleichungssysteme, sind Lösungen für den gewünschten Bewegungsverlauf bestimmbar.
- Eine Fehleranalyse zeigt, dass mit dem impliziten Euler-Verfahren ohne Verwendung der Projektionsmethode das genaueste Ergebnis bestimmt wird.
- Bei Anwendung der numerischen Verfahren ergeben sich Konditionszahlen der Größenordnung von  $10^{19}$ , was eine hohe Fehleranfälligkeit bedeutet. Dies sollte bei weiteren Untersuchungen des Systems mit anderen Bewegungsverläufen beachtet werden.

### Trajektorie

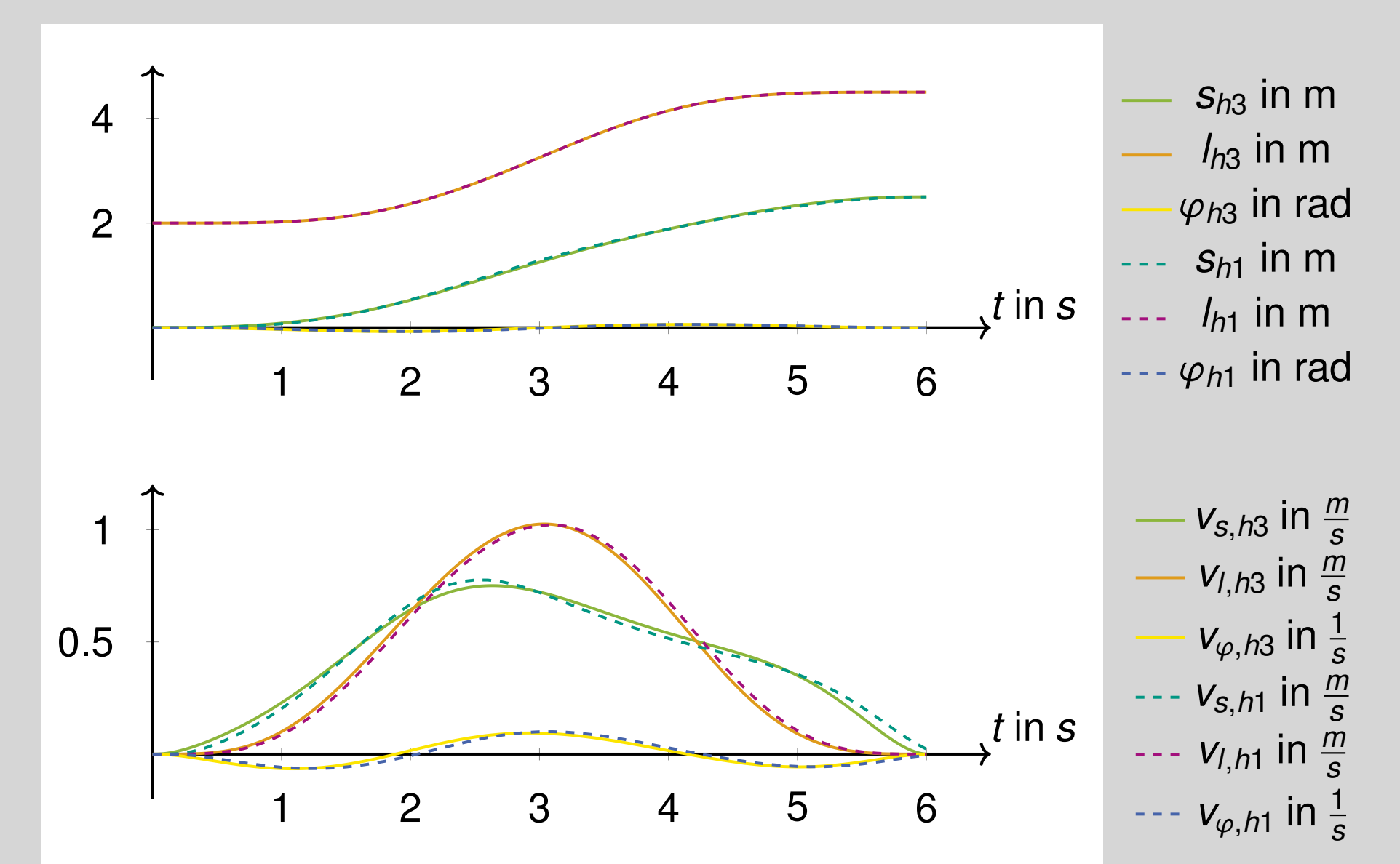
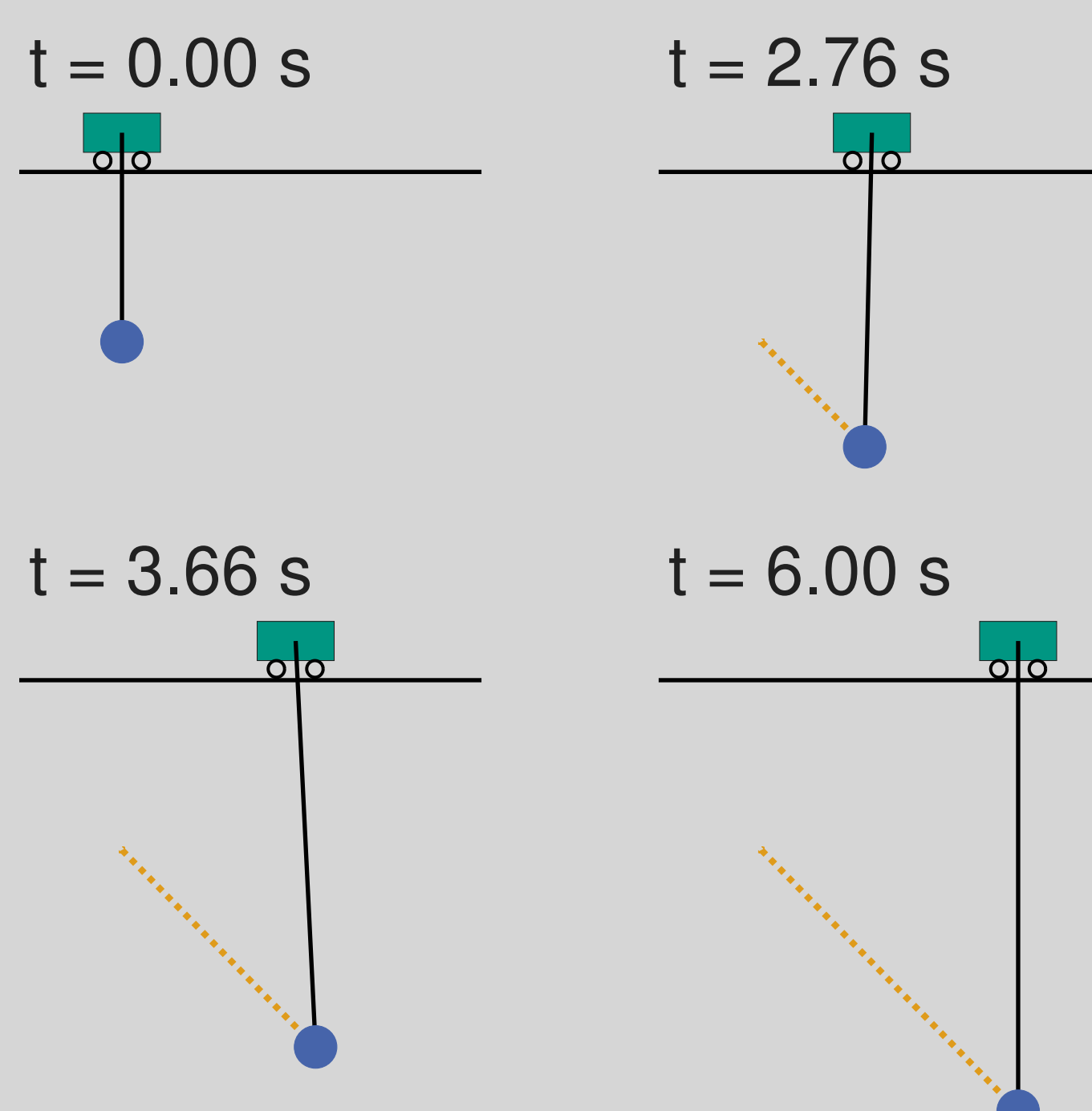
- Bei einem Vergleich der mit dem impliziten Euler berechneten Systemgrößen mit der vorgegebenen Trajektorie ergibt sich ein Fehlermaß des Wertes null.



## Das System



## Bewegungsverlauf



## References

1. WOJCIECH BLAJER and KRZYSZTOF KOLODZIEJCZYK (2004): A Geometric Approach to Solving Problems of Control Constraints: Theory and a DAE Framework In: Multibody System Dynamics, 191 (3-5), doi: 10.1023/B:MUBO.0000040800.40045.51
2. Robert Seifried, (2014): Dynamics of Underactuated Multibody Systems, doi: 10.1007/978-3-319-01228-5
3. Stefan Reichl (2011): Inverse Dynamics and Trajectory Tracking of Underactuated Multibody Systems. Diss., Prandauerstraße 25/4, 4040 Linz: Technische Universität Wien
4. WOJCIECH BLAJER and Robert Seifried (2013): Analysis of servo-constraint problems for underactuated multibody systems In: Mechanical Sciences, doi: 10.5194/ms-4-113-2013