

Numerische Simulation starrer Körper unter Verwendung von Einheitsquaternionen

Sophia Nemrawa | Bachelorarbeit (2026)

Motivation

- Diese Arbeit beschreibt freie Starrkörperrotationen im gravitationsfreien Raum mit Einheitsquaternionen und entwickelt robuste numerische Verfahren zur Simulation.
- Quaternionenformulierungen führen typischerweise auf differential-algebraische Gleichungen (DAE), welche meist einen erhöhten numerischen Rechenaufwand bedeuten.
- Formulierungen in minimalen Winkelgeschwindigkeiten umgehen die DAE-Struktur.
→ Die zwei Ansätze führen zu einer verringerten Redundanz der Beschreibung und vermeiden algebraische Zwangsbedingungen.

Differential-algebraische Gleichungen

- kinematischer Ansatz mit dem Lagrange Formalismus: Lagrange Gleichung erster Art [2]
 - Quaternionenbeziehung nach [1]: Rotationsenergie
- $$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{M}}_4(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{M}}_4(\mathbf{q}) = 4 \mathbf{G}(\mathbf{q})^T \mathbf{J} \mathbf{G}(\mathbf{q})$$
- Diskretisierte Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Mittelpunkregel

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Psi_{i+\frac{1}{2}} \Delta t$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_4(\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}}) \Psi_{i+1} = \tilde{\mathbf{M}}_4(\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}}) \Psi_i + 2 \tilde{\mathbf{M}}_4(\Psi_{i+\frac{1}{2}}) \mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}} \Delta t - \mathbf{q}_{i+1} \lambda_{i+1} \Delta t$$

$$0 = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{i+1} \cdot \mathbf{q}_{i+1} - 1)$$

Minimale Geschwindigkeiten

- kinematischer Ansatz: Eulersche Gleichungen [2]

$$\mathbf{0} = \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}$$

- Quaternionenbeziehung

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{G}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\Omega}$$

- Diskretisierte Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Mittelpunkregel

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \frac{1}{2} \mathbf{G}(\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}})^T \boldsymbol{\Omega}_{i+\frac{1}{2}} \Delta t$$

$$\mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} = \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_i - (\boldsymbol{\Omega}_{i+\frac{1}{2}} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_{i+\frac{1}{2}}) \Delta t$$

Gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$

Ergebnisse

Modifizierte Minimalgeschwindigkeiten

- Ansatz: Algorithmus ALGO-C1 nach [4]: Verwendung der Integralform des Drehimpulsbilanz

$$\mathbf{R}_{i+1} \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} - \mathbf{R}_i \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_i = \mathbf{0}$$

- diskretisierte Quaternionenbeziehung mit Mittelpunkregel
- Diskretisierte Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \frac{1}{2} \mathbf{G}(\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2}})^T \boldsymbol{\Omega}_{i+\frac{1}{2}} \Delta t$$

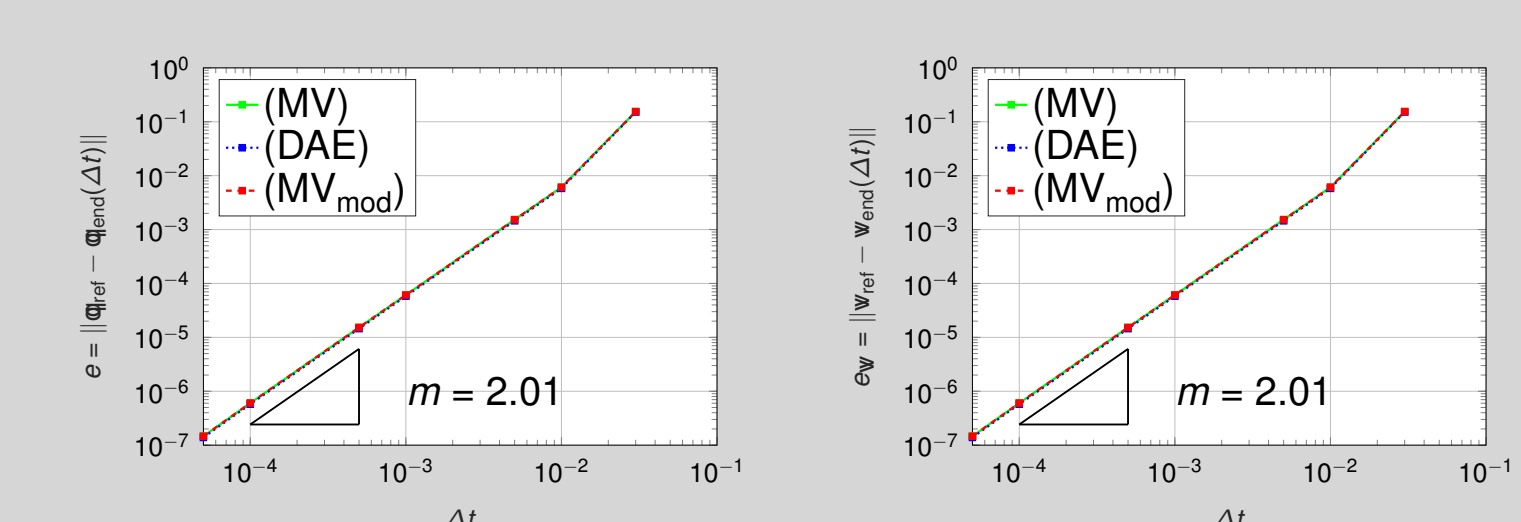
$$\mathbf{0} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_{i+1}) \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} - \mathbf{R}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}_i$$

ODE mit $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$

- Für die entwickelten Ansätze wird die **Normbedingung der Einheitsquaternionen** trotz der **Struktur gewöhnlicher Differentialgleichungen** eingehalten.
- Zusätzlich halten die Minimalgeschwindigkeiten die Energieerhaltung im Gegensatz zu den differential-algebraischen Gleichungen ein.
- Die **modifizierte Minimalgeschwindigkeiten** erzielt die höchste Genauigkeit und erreicht eine Drehimpulserhaltung.
- Alle Verfahren zeigen konsistente **quadratische Konvergenz**

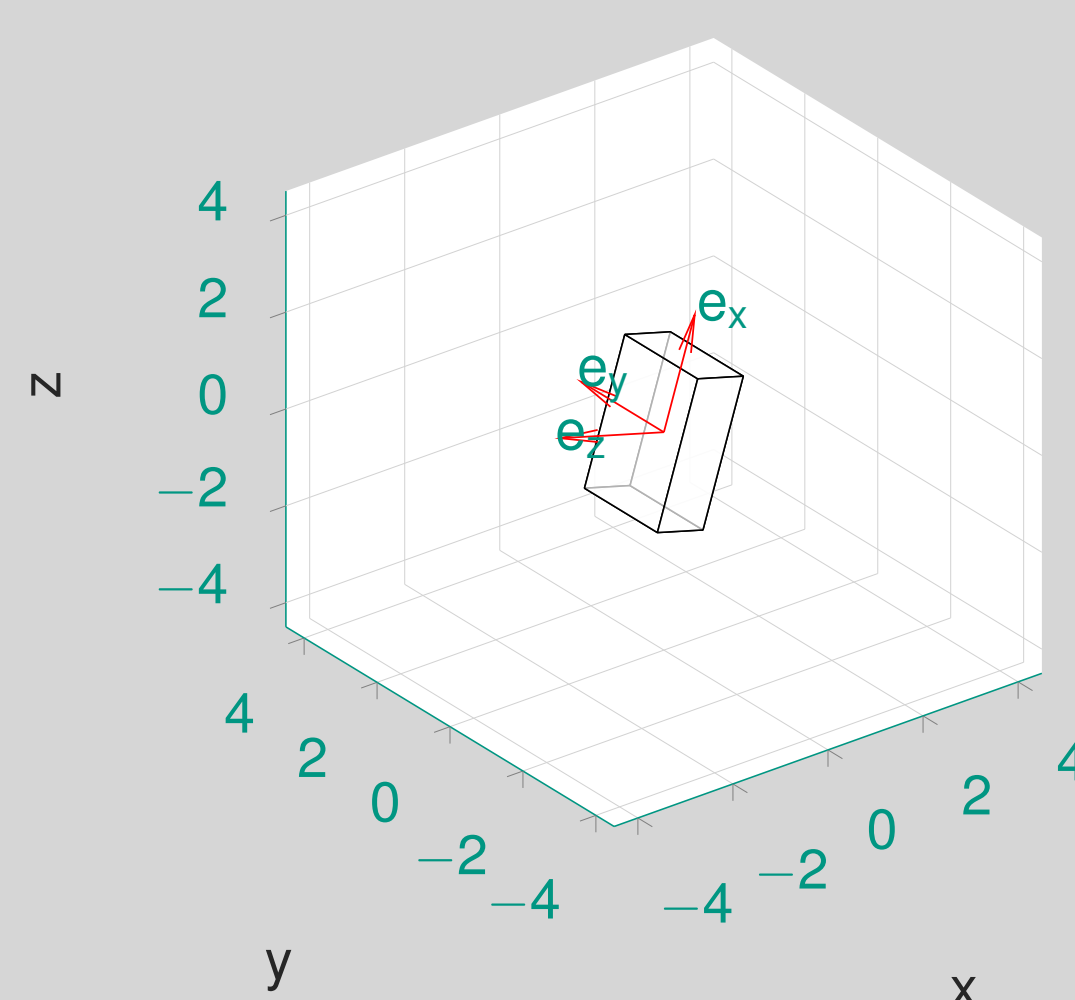
Konvergenzverhalten und Vergleichbarkeit

- Untersuchung des Einflusses der Zeitschrittweite Δt auf die Genauigkeit der Verfahren.



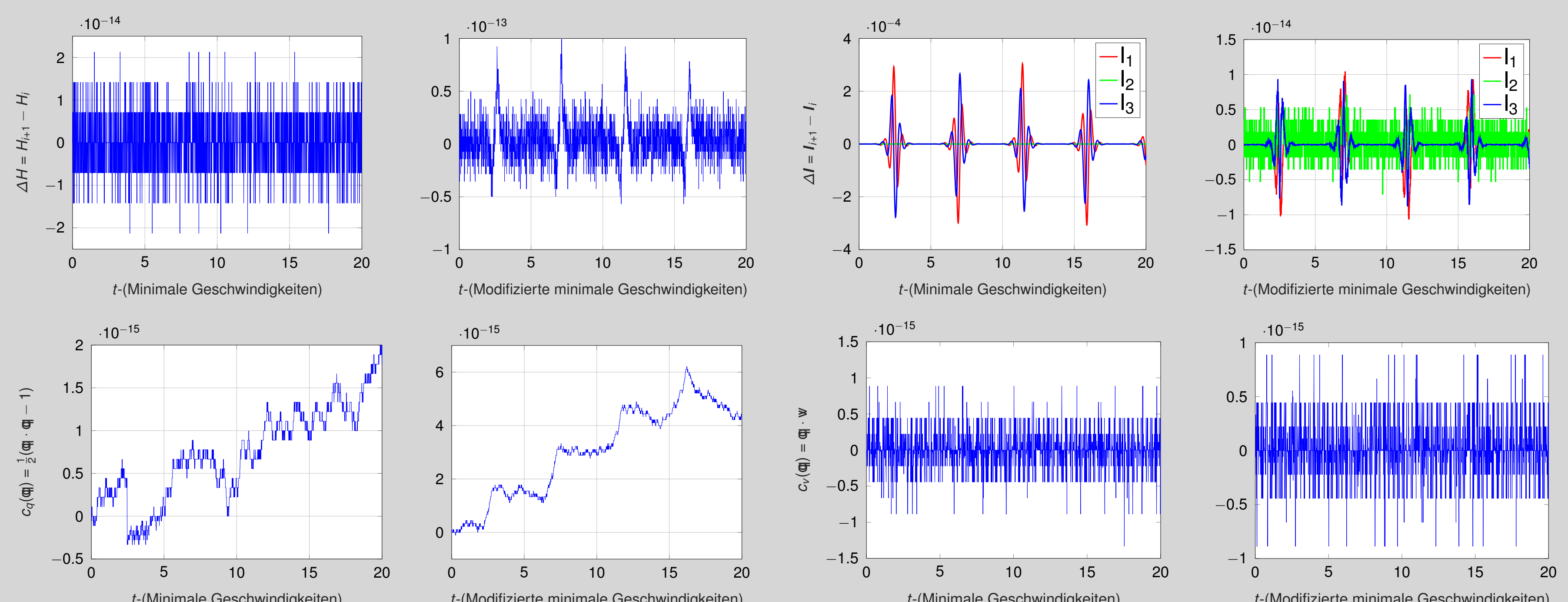
- Alle Verfahren zeigen eine **quadratische Konvergenz**.

Dschanibekow-Effekt



Simulation des frei rotierenden Quaders, $t = 1$ s nach Simulationsparametern von [3]

Erhaltungseigenschaften und Nebenbedingungen



References

1. P. Betsch, R. Siebert (2009): Rigid body dynamics in terms of quaternions: Hamiltonian formulation and conserving numerical integration. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 79(4): 444–473 doi: [10.1002/nme.2586](https://doi.org/10.1002/nme.2586)
2. D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall (2019): Technische Mechanik 3 Kinetik. Berlin: Springer, doi: [10.1007/978-3-662-59551-0](https://doi.org/10.1007/978-3-662-59551-0)
3. R. I. Leine, G. Capobianco, P. Bartelt, M. Christen und A. Caviezel (2021): Stability of rigid body motion through an extended intermediate axis theorem: application to rockfall simulation. In: Multibody System Dynamics, 52(4): 431–455, doi: [10.1007/s11044-021-09792-y](https://doi.org/10.1007/s11044-021-09792-y)
4. J. C. Simo und K. K. Wong (1991): Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. In: international journal for numerical methods in engineering, 31(31): 19–52 doi: [10.1002/nme.1620310103](https://doi.org/10.1002/nme.1620310103)