

Untersuchung spezieller Finite-Element-Formulierungen zur Vermeidung von Schublocking am Beispiel des Timoshenko-Balkens

Jannis Ruoff | Bachelorarbeit (2026)

Motivation

Ziel:

Schublocking am Timoshenko-Balken vermeiden und eine verbesserte Approximation für verzerrte Balkennetze

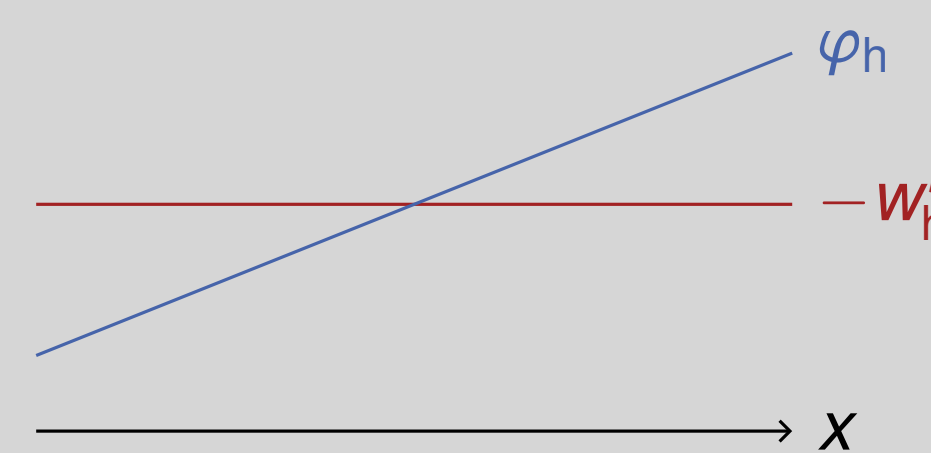
Ansatz:

- Theoretische und numerische Untersuchung spezieller Finite-Element-Formulierungen:
 1. Discrete Shear Gap Methode
 2. Mixed Displacement Methode
- Erarbeitung einer Petrov-Galerkin Elementformulierung

Schublocking

- Für schlanke Balken kann die Bernoulli-Hypothese $\gamma \rightarrow 0$ auf diskretisierter Ebene nicht für alle Punkte eingehalten werden

$$\gamma_h = w'_h + \varphi_h \neq 0$$

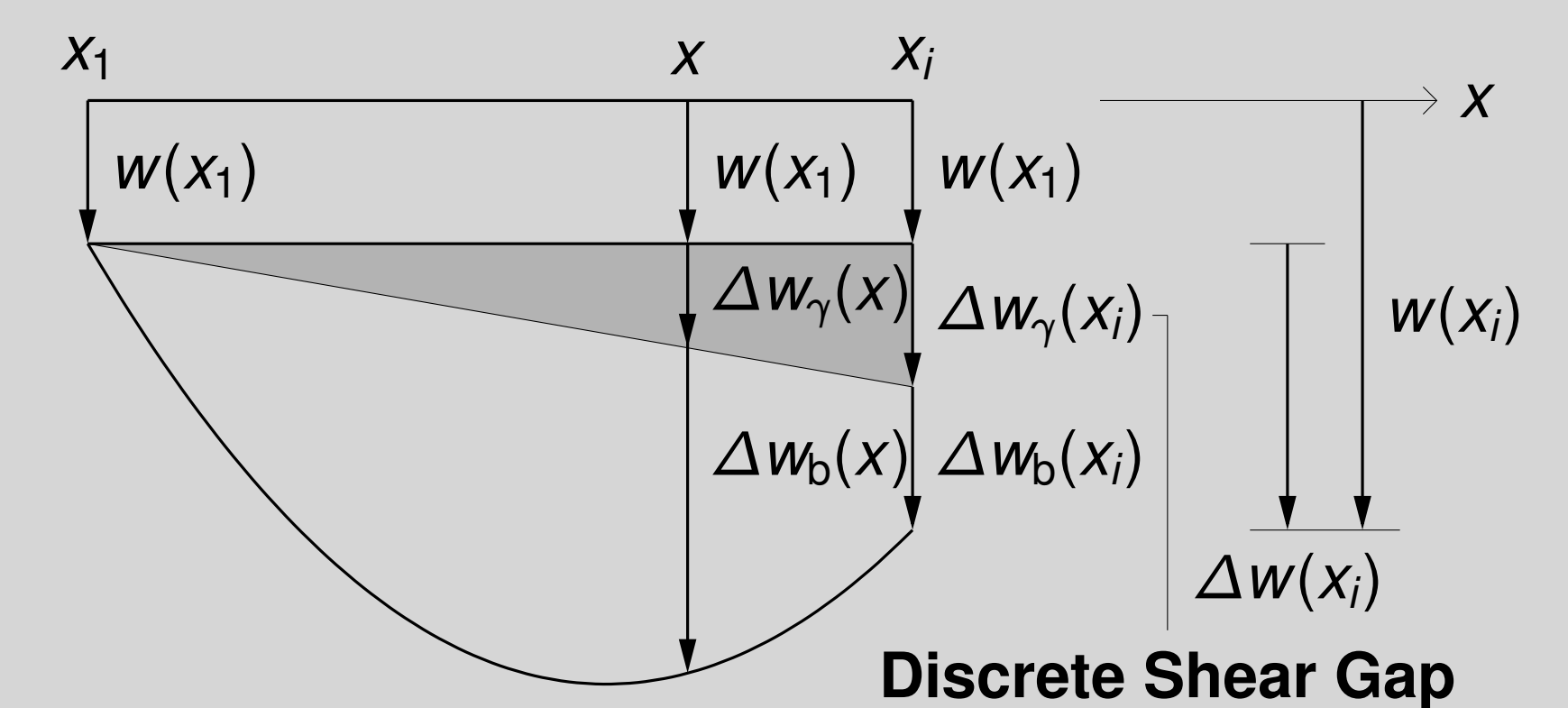


- Folge: numerische vollständige Integration (FI) der Schubsteifigkeitsmatrix erzeugt **Schublocking**

Discrete Shear Gap Methode

- Spezifische Schubdehnungsformulierung

$$\gamma_h = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \frac{dN_i}{dx} \Delta w_{\gamma}^i \quad \text{mit} \quad \Delta w_{\gamma}^i = w_h|_{x_1}^{x_i} + \int_{x_1}^{x_i} \varphi_h dx$$



Mixed Displacement Methode

- Basis: Hellinger-Reissner Variationsprinzip
- Einführung eines **zusätzlichen Freiheitsgrades** $\tilde{w}_s$:
kann als Discrete Shear Gap interpretiert werden

$$\mathbf{u} = [w \quad \varphi \quad \tilde{w}_s]^T$$

- Es resultiert die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{MD}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} [(\tilde{\mathbf{B}}_{MD}^s)^T \mathbf{G} A_s (\mathbf{B}_{MD}^s - \tilde{\mathbf{B}}_{MD}^s) + (\mathbf{B}_{MD}^s)^T \mathbf{G} A_s \tilde{\mathbf{B}}_{MD}^s + (\mathbf{B}_{MD}^b)^T \mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{B}_{MD}^b] dx$$

Petrov-Galerkin Elementformulierung

- Netzverzerrungen führen zu einer Abnahme der Approximationsgenauigkeit
- Unsymmetrische (US) Formulierung soll quadratisches Verschiebungsfeld

$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

unabhängig von Verzerrung Δ darstellen können

- FE-Approximation

$$w_h = \sum_{i=1}^3 M_i w_i^{(e)}$$

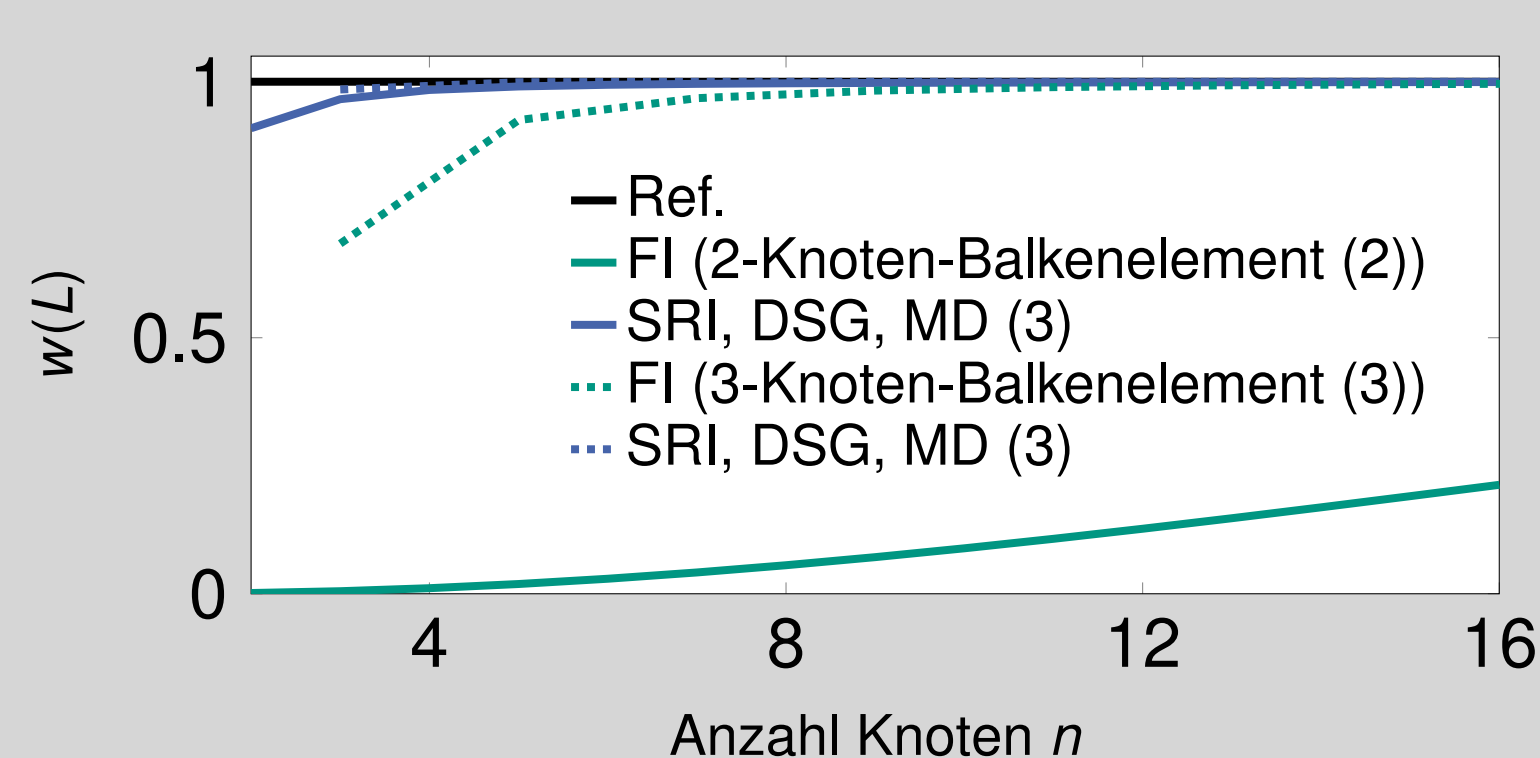
- Koeffizientenvergleich liefert die **Vollständigkeitsbedingungen**

$$\sum_{i=1}^3 M_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 M_i x_i = x, \quad \sum_{i=1}^3 M_i x_i^2 = x^2$$

- Verwendung von **parametrischen Formfunktionen** N_j für Approximation der **Testfunktion**
- Verwendung von **metrischen Formfunktionen** M_i für Approximation der **Lösungsfunktion**
- Folge: quadratisches Verschiebungsfeld kann unabhängig von Verzerrung reproduziert werden

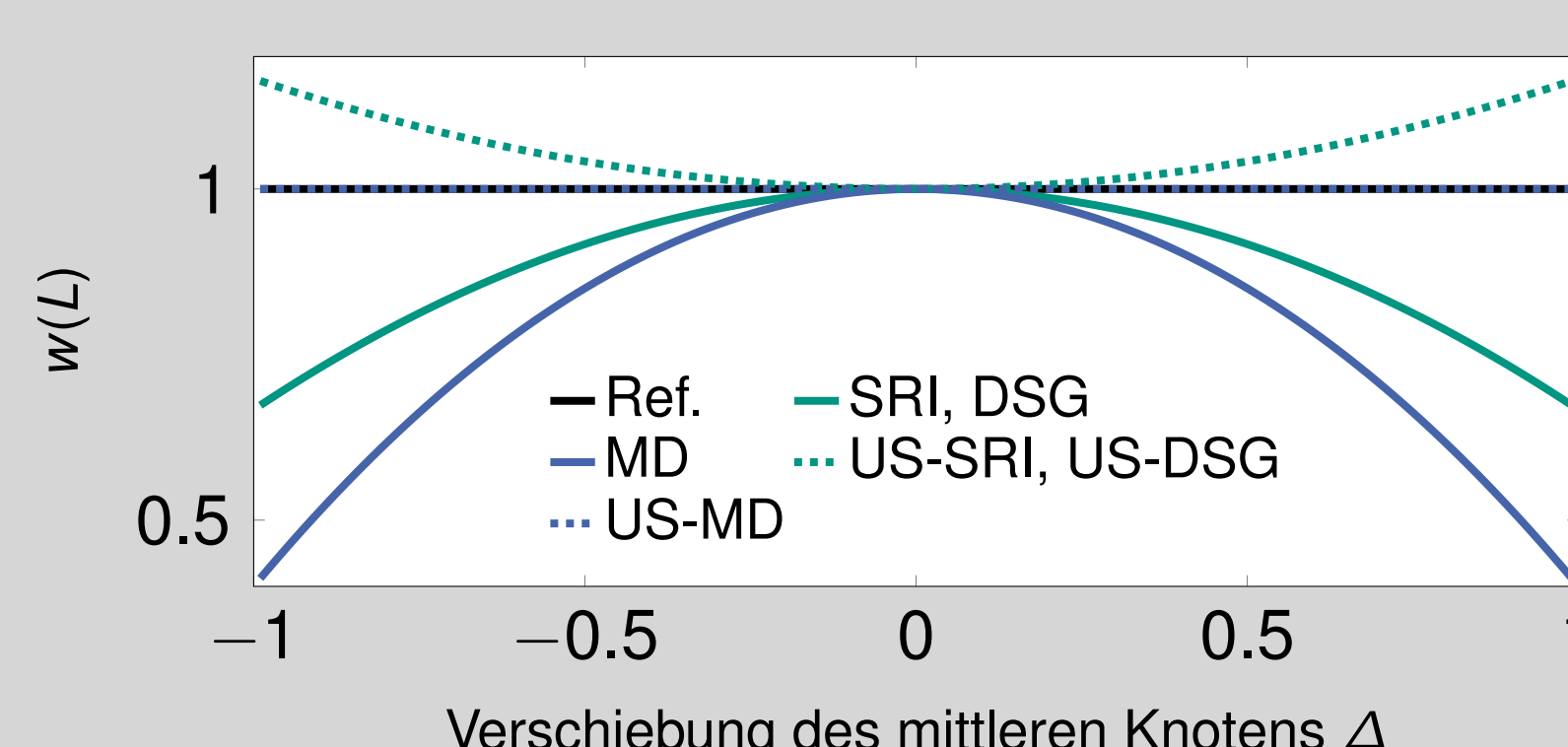
Numerische Untersuchungen und Ergebnisse

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{qx^5}{120L} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^2x^2}{6} \right) + \frac{1}{GA_s} \left(\frac{qx^3}{6L} + \frac{qLx}{2} \right)$$



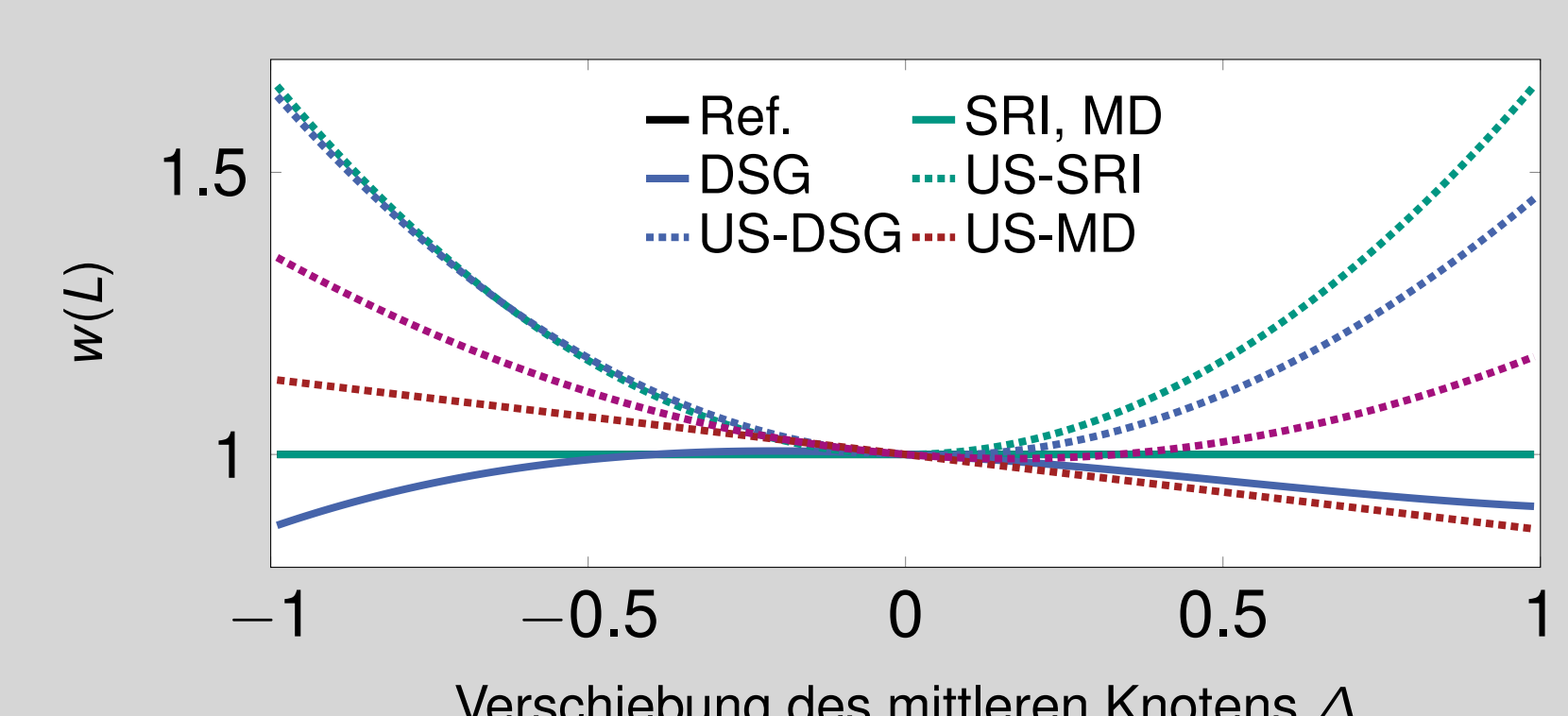
Die DSG und MD Methode verhindern Schublocking für unverzerrte Netze

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} Fx^3 + \frac{1}{2} FLx^2 \right) + \frac{1}{GA_s} Fx$$



Einzelbelastungen: sehr gute Approximation der US-MD Methode bei Netzverzerrungen

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24} qx^4 - \frac{1}{6} qLx^3 + \frac{1}{4} qL^2x^2 \right) + \frac{1}{GA_s} \left(-\frac{1}{2} qx^2 + qLx \right)$$



Streckenbelastungen: Unsymmetrische Formulierungen weisen i. A. nicht auf eine verbesserte Approximation bei Netzverzerrungen hin

Literatur

- P. Betsch (2013): Finite-Elemente-Methoden: Skriptum zur Vorlesung. Karlsruhe, 2013.
- S. Bieber, B. Oesterle, E. Ramm, M. Bischoff (2018): A variational method to avoid locking – independent of the discretization scheme. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, doi: [10.1002/nme.5766](https://doi.org/10.1002/nme.5766)
- K.-U. Bletzinger, M. Bischoff, E. Ramm (2000): A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. In: Computers & Structures, 51-3, doi: [10.1016/S0045-7949\(99\)00140-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00140-6)
- S. Rajendran, K. M. Liew (2003): A novel unsymmetric 8-node plane element immune to mesh distortion under a quadratic displacement field. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, doi: [10.1002/nme.836](https://doi.org/10.1002/nme.836)