

Untersuchung des Einflusses von Netzverzerrungen auf 6-knotige Finite Elemente

Christian Wahr | Bachelorarbeit (2025)

Symmetrische Formulierung Bubnov-Galerkin (PP)

Schwache Form

$$\int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{D}\epsilon(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma_\sigma$$

- Lösungsfunktion \mathbf{u} und Testfunktion \mathbf{v} werden mit Lagrange-Formfunktionen N_i approximiert :

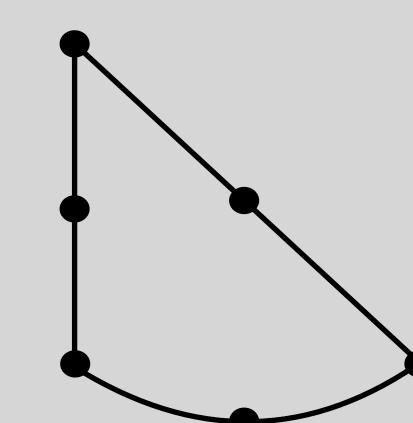
$$\mathbf{u}^{h,e} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{u}_i N_i(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{h,e} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{v}_i N_i(\xi, \eta)$$
- $\mathbf{u}^{h,e}$ und $\mathbf{v}^{h,e}$ erfüllen die Bedingungen der quadratischen Vollständigkeit und Stetigkeit, wenn die Vernetzung unverzerrt ist.
- Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch.

Verzerrtes Element

- Die Approximation der Verschiebung besitzt für die 6 Knoten höchstens quadratische Terme :

$$u_x^{h,e} = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2$$
- Nach dem isoparametrischen Konzept wird auch die Geometrie mit denselben Ansatzfunktionen approximiert :

$$x^{h,e} = \sum_{i=1}^6 x_i N_i(\xi, \eta)$$
- Aus diesem Ausdruck konstruiert, haben die globalen Basisfunktionen im verzerrten Fall Terme von höherer Ordnung, z.B. $\xi^2 \eta$
- Bei bestimmten Verzerrungen geht die quadratische Vollständigkeit verloren.



Unsymmetrische Formulierung Petrov-Galerkin (PM)

Metrische Formfunktionen :

$$\sum_{i=1}^6 M_i^p x_i^p y_i^q = x^p y^q$$

mit $p, q = 0, 1, 2$ und $0 \leq p + q \leq 2$

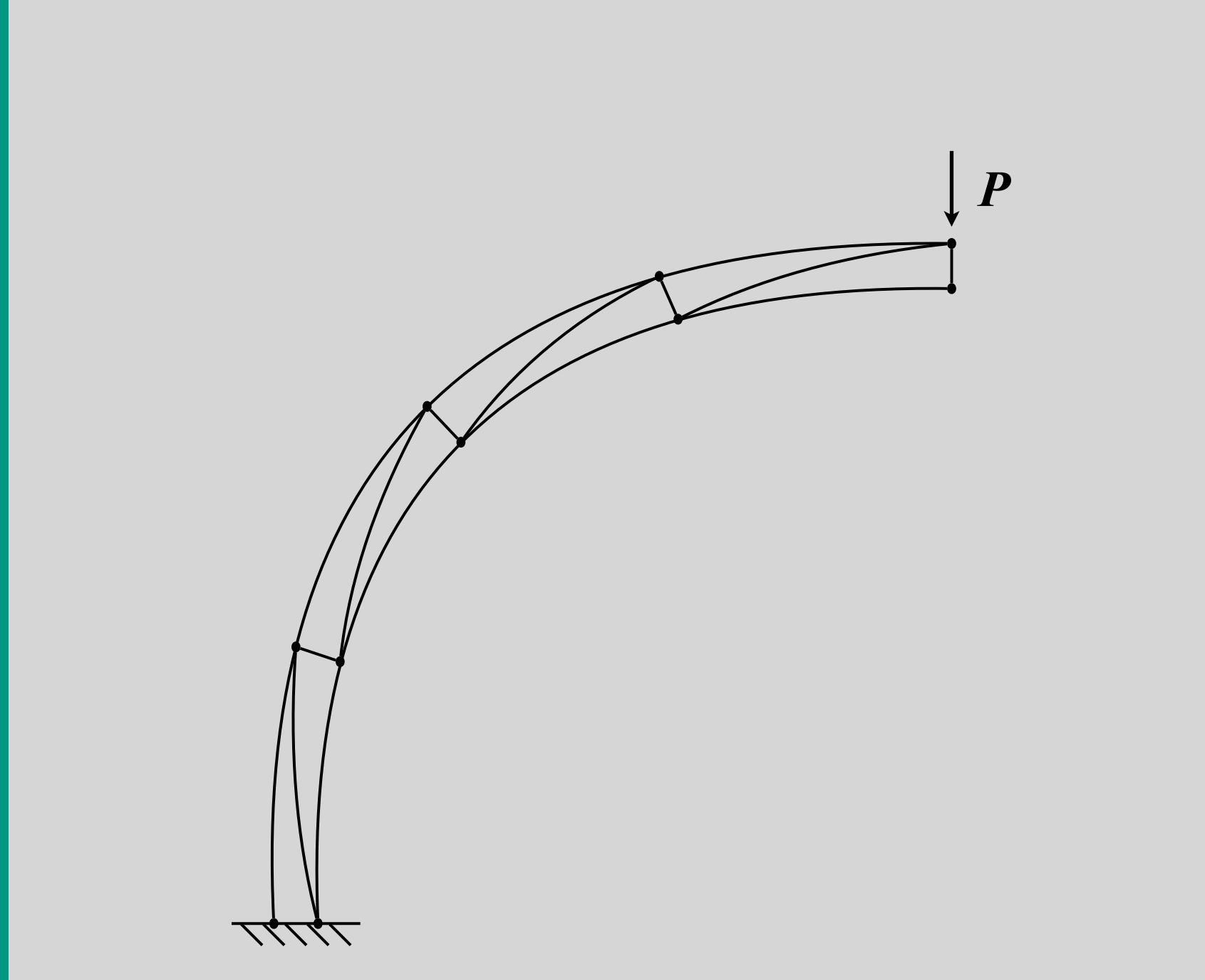
Diese Gleichungen liefern 6 metrische Formfunktionen, die auf Elementebene die quadratische Vollständigkeit erfüllen.

Approximation der Lösungs- und Testfunktion :

$$\mathbf{u}^{h,e} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{u}_i M_i^p(x, y) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{h,e} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{v}_i N_i(\xi, \eta)$$

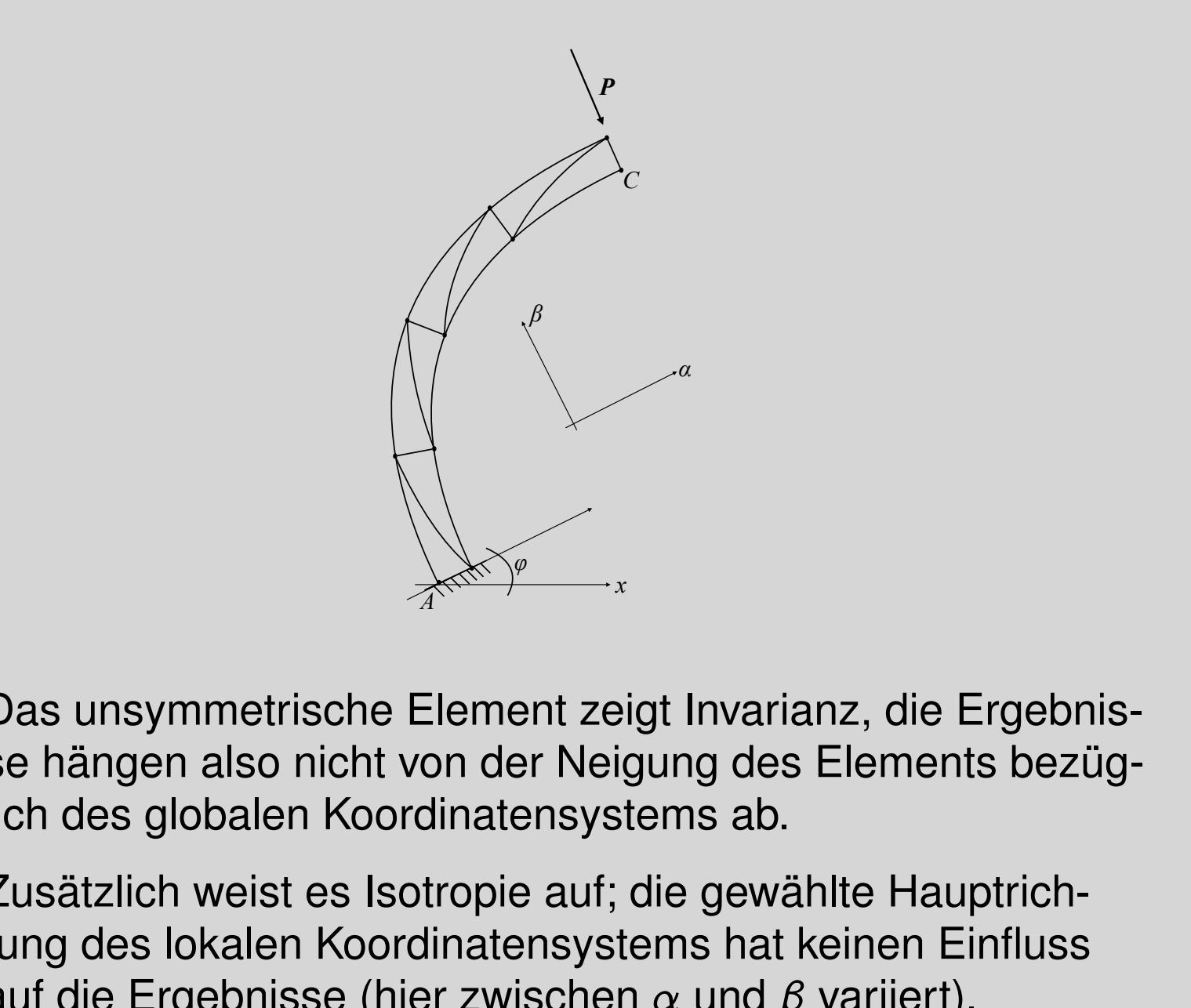
- Steifigkeitsmatrix ist unsymmetrisch.

Numerisches Beispiel – Gekrümmter Kragarm



- Die Verschiebung des unteren rechten Knotens infolge einer Einheitslast P wird berechnet.
- Die Anzahl der Elemente entlang der Balkenlänge wird variiert.
- Die PM-Formulierung liefert, vor allem für grobe Netze, bessere Ergebnisse.

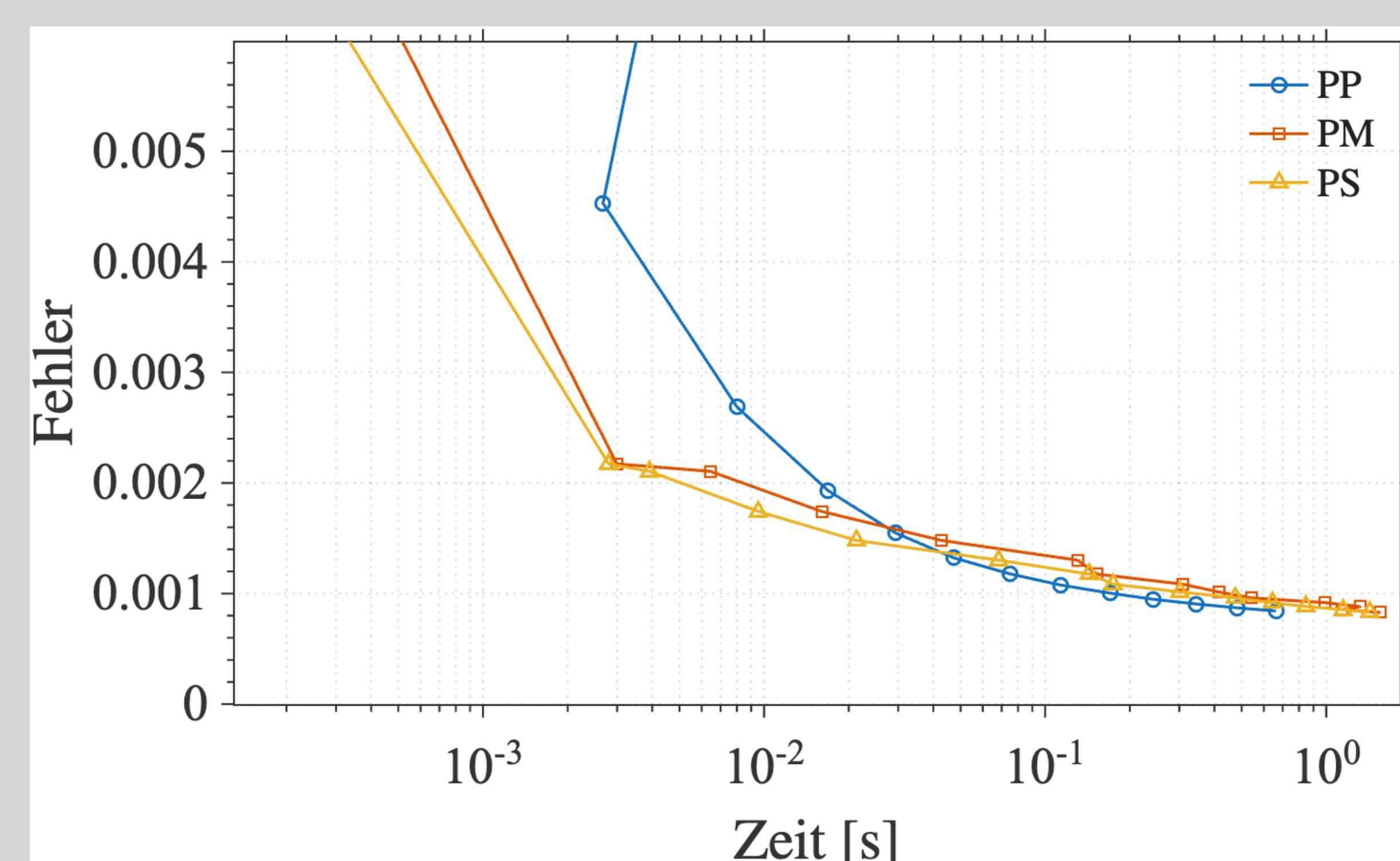
Anzahl Elemente	normiert auf exakte Lösung	
	PP	PM
8	0.7541	1.0505
12	0.9371	0.9985
16	0.9754	0.9934
24	0.9915	0.9943



- Das unsymmetrische Element zeigt Invarianz, die Ergebnisse hängen also nicht von der Neigung des Elements bezüglich des globalen Koordinatensystems ab.
- Zusätzlich weist es Isotropie auf; die gewählte Hauptrichtung des lokalen Koordinatensystems hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse (hier zwischen α und β variiert).

Performance Test

- Die Petrov-Galerkin Formulierung liefert zwar bessere Ergebnisse, benötigt aber durch die unsymmetrische Steifigkeitsmatrix zusätzliche Rechenzeit.
- Für eine Reihe von feiner werdenden Netzen wird die Zeit gemessen, die benötigt wird, um das Gleichungssystem zu lösen.
- Das unsymmetrische Element zeigt trotz Mehraufwand eine bessere Leistung als das symmetrische.
- Bei der Verwendung von sog. *skew*-Koordinaten (PS) scheint das unsymmetrische Element sogar noch etwas effizienter zu sein.



Referenzen

- Liew, K. M., Rajendran, S. und Wang, J. (2006): A quadratic plane triangular element immune to quadratic mesh distortions under quadratic displacement fields. In: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(9/10/11/12): 1207–1223, doi: [10.1016/j.cma.2005.04.012](https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.04.012)
- Lee, N.S. und Bathe, K.J. (1993): Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36(20): 3553–3576, doi: [10.1002/nme.1620362009](https://doi.org/10.1002/nme.1620362009)
- Xie, Q., Sze, K. Y. und Zhou, Y. X. (2016): Modified and Trefftz unsymmetric finite element models. In: International Journal of Mechanics and Materials in Design, 12(1): 53–70, doi: [10.1007/s10999-014-9289-3](https://doi.org/10.1007/s10999-014-9289-3)