Prüfung in

# Baudynamik

17. Februar 2025

Name: ............................................ Vorname: ............................................

Matr.-Nr.: .................. Studiengang: ............................................................

**Hinweise:**

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | |
| Korrektor | | | | |

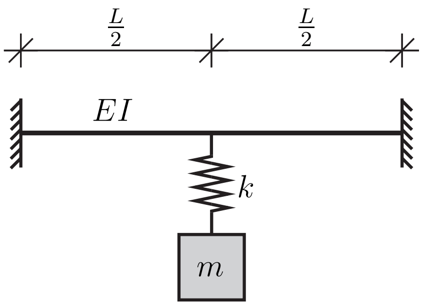
(Eintrag erfolgt durch Institut)

## 1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

a) Bestimmen Sie die Amplitude und die Frequenz der Schwingung

$$x(t) = 4\sin(3\pi t) + 3\cos(3\pi t).$$

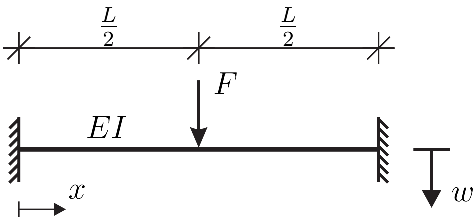
b) Eine Kiste (Masse $m$) wird, wie dargestellt, mit einer Feder (Federsteifigkeit $k$) an einem beidseitig eingespannten Balken (Länge $L$, Biegesteifigkeit $EI$) aufgehängt.




Skizzieren Sie ein Ersatzsystem mit nur einer (Ersatz-)Feder und bestimmen Sie deren Ersatzfedersteifigkeit $k_{\text{Ers}}$.

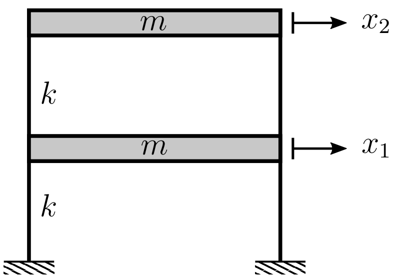
*Gegeben:* $m$, $k$, $L$, $EI$.

*Hinweis*:




$$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{192EI}$$

c) Gegeben sei der dargestellte zweigeschossige Stockwerkrahmen sowie die zugehörigen Bewegungsgleichungen.




$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Schätzen Sie die erste Eigenkreisfrequenz des Systems mithilfe des Rayleigh-Quotienten ab. Begründen Sie Ihre Wahl des genäherten Eigenvektors.

*Gegeben:* $m$, $k$.

d) Wie lässt sich die Beschreibung gekoppelter Mehrfreiheitsgradschwingungen entkoppeln? In welcher Form muss sich dabei die Dämpfungsmatrix darstellen lassen?

**Musterlösung - Aufgabe 1**

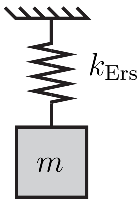
a) • Amplitude

$$A = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

• Frequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$$

b) • Ersatzsystem




• Ersatzfedersteifigkeit Balken

– Kraftgesetz (vgl. Hinweis)

$$F = \frac{192EI}{L^3}w$$

– Vergleich mit linearem Federgesetz $F = k_{\mathrm{B}}w$ liefert Ersatzfedersteifigkeit

$$k_{\mathrm{B}} = \frac{192EI}{L^3}$$

• Ersatzfedersteifigkeit Gesamtsystem (Reihenschaltung aus $k_{\mathrm{B}}$ und $k$)

$$k_{\mathrm{Ers}} = \frac{1}{\frac{1}{k_{\mathrm{B}}} + \frac{1}{k}} = \frac{k_{\mathrm{B}}k}{k_{\mathrm{B}} + k} = \frac{192EIk}{192EI + kL^3}$$

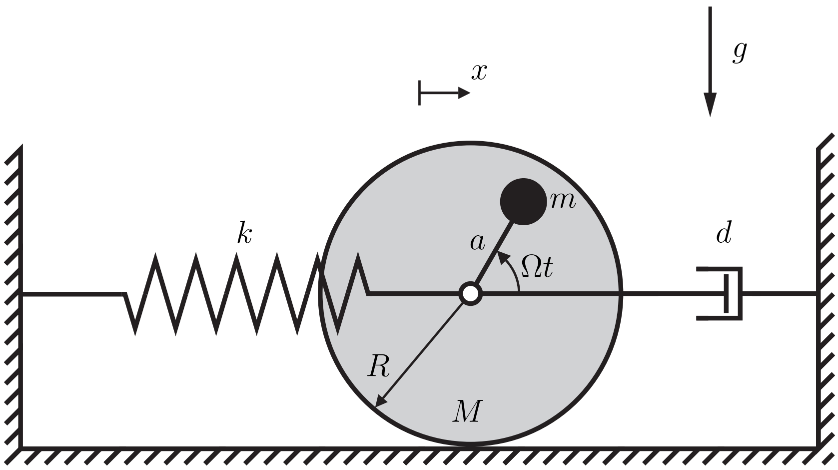
c) Wähle z. B. $\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ als Näherung für den 1. Eigenvektor. Begründung: gleichsinnige Verformung für 1. Eigenform (gleiches VZ), Annahme linearer Verformung des Rahmens.

$$R = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} m & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{2}{5}\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 \leq \sqrt{\frac{2}{5}\frac{k}{m}}$$

d) Die Entkopplung der Bewegungsgleichungen ist mit einer Modaltransformation möglich. Die Dämpfungsmatrix muss hierbei als Linearkombination der Massen- und der Steifigkeitsmatrix darstellbar sein, also in der Form: $\boldsymbol{D} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K}$.

# 2. Aufgabe: (ca. 33 % der Gesamtpunkte)




Der dargestellte kreisförmige, starre Körper mit dem Radius $R$ und der Masse $M$, rollt ohne zu gleiten auf einer ebenen Unterlage. Die Position des Körperschwerpunkts wird über die Koordinate $x$ beschrieben. Im Schwerpunkt ist eine feststehende Achse angebracht, die während der Bewegung des Körpers nicht mitrotiert. Diese Achse ist, wie abgebildet, über eine Feder mit der Federsteifigkeit $k$ und einen Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten $d$ mit der Umgebung verbunden.
Zusätzlich ist an der Achse ein Unwuchterreger montiert. Die Unwuchtmasse $m$ rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ und konstantem Abstand $a$ um die Achse. Das System ist so ausgelegt, dass der Körper stets in Kontakt mit dem Untergrund bleibt.
Für $x = 0$ ist die Feder spannungsfrei. Auf das System wirkt die Erdbeschleunigung $g$.

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems in der Koordinate $x$ mithilfe der synthetischen Methode.

Verwenden Sie in den folgenden Teilaufgaben die vereinfachte Bewegungsgleichung

$$\tilde{M}\ddot{x} + d\dot{x} + kx = ma\Omega^2 \cos(\Omega t).$$

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des (ungedämpften) Systems sowie das Lehrsche Dämpfungsmaß.

c) Transformieren Sie die Bewegungsgleichung in Eigenzeit.

d) Geben Sie die Amplitude der stationären Schwingung an.

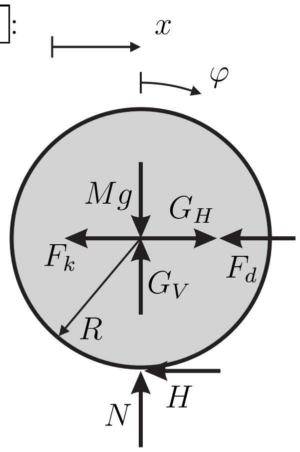
*Gegeben:* $M$, $m$, $\tilde{M}$, $k$, $d$, $R$, $a$, $\Omega$, $g$.

## Musterlösung - Aufgabe 2

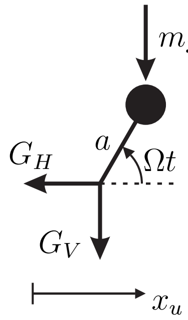
a) Bewegungsgleichung (synthetische Methode)

- Freischnitt in allgemeiner Lage

$\boxed{1}$:




$\boxed{2}$:




mit:

$$F_k = kx$$
$$F_d = d\dot{x}$$

- Kinematik

$$\varphi = \frac{x}{R} \qquad x_u = x + a\cos(\Omega t)$$
$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{R} \qquad \dot{x}_u = \dot{x} - a\Omega\sin(\Omega t)$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R} \qquad \ddot{x}_u = \ddot{x} - a\Omega^2\cos(\Omega t)$$

- Massenträgheitsmoment des kreisförmigen Körpers

$$\Theta_S = \frac{1}{2}MR^2$$

- Herleitung Bewegungsgleichung

$\boxed{1}$ : Schwerpunktsatz: $M\ddot{x} = G_H - F_k - F_d - H$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{x} + d\dot{x} + kx = G_H - H \tag{1}$$

Drallsatz: $\Theta_S\,\ddot{\varphi} = HR$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}M\ddot{x} = H \tag{2}$$

$\boxed{2}$ : Schwerpunktsatz: $m\ddot{x}_u = -G_H$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -G_H + ma\Omega^2\cos(\Omega t) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad (1) + (2) + (3): \quad \underbrace{\left(\frac{3}{2}M + m\right)}_{\tilde{M}}\ddot{x} + d\dot{x} + kx = ma\Omega^2\cos(\Omega t)$$

b) - Normierung der Bewegungsgleichung

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \underbrace{\frac{d}{\tilde{M}}}_{2D\omega_0}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{\tilde{M}}}_{\omega_0^2}x = \frac{m}{\tilde{M}}a\Omega^2\cos(\Omega t)$$

- Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\tilde{M}}}$$

- Lehrsches Dämpfungsmaß

$$D = \frac{d}{2\tilde{M}\omega_0} = \frac{d}{2\sqrt{\tilde{M}k}}$$

c) Transformation der Bewegungsgleichung in Eigenzeit

$$\tau = \omega_0 t \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{\tau}{\omega_0}; \qquad \frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}\tau}; \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \omega_0^2 x'' + 2D\omega_0^2 x' + \omega_0^2 x = \frac{m}{\tilde{M}} a\Omega^2 \cos(\eta\tau) \\ &\Rightarrow \quad x'' + 2Dx' + x = \frac{m}{\tilde{M}} a\eta^2 \cos(\eta\tau) \end{aligned}$$

d) Amplitude der stationären Schwingung
Gemäß Vorlesung lautet die partikuläre Lösung für Unwuchterregung

$$x_{\mathrm{p}} = C_{\mathrm{p}} \cos(\eta\tau - \gamma)$$

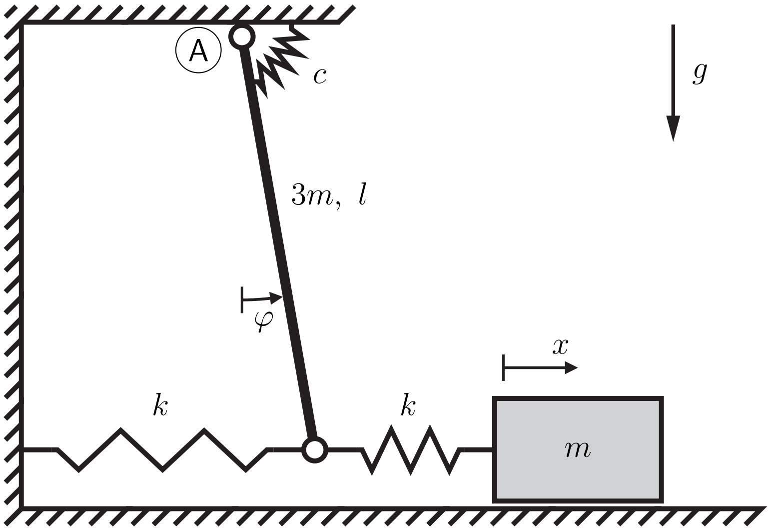
Für die Amplitude der stationären Schwingung gilt

$$C_{\mathrm{p}} = \bar{x}_0 \, V_1 = \frac{m}{\tilde{M}} a \, V_1$$

mit der Vergrößerungsfunktion

$$V_1(D, \eta) = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

## 3. Aufgabe: (ca. 47 % der Gesamtpunkte)




Ein schlanker, starrer Stab der Masse $3m$ und der Länge $l$ ist im Punkt A gelenkig gelagert und mit einer Drehfeder (Drehfedersteifigkeit $c$) verbunden. Am anderen Ende ist der Stab, wie abgebildet, über zwei Federn (jeweils mit der Federsteifigkeit $k$) mit einer Wand sowie einer reibungsfrei gleitenden Masse $m$ verbunden.
Die Bewegung des Stabes wird durch den Winkel $\varphi$ beschrieben, die Bewegung der Masse durch die Koordinate $x$. Es kann davon ausgegangen werden, dass nur kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage auftreten (d. h. $|\varphi| \ll 1$ und $|x| \ll 1$). Für $\varphi = 0$ und $x = 0$ sind alle Federn spannungsfrei. Auf das System wirkt die Erdbeschleunigung $g$.

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen des Systems in den Koordinaten $\varphi$ und $x$ mithilfe der Methode nach Lagrange. Approximieren Sie dazu innerhalb des Lagrange-Formalismus die Energien quadratisch.

Im Folgenden sei $k = \frac{3mg}{2l}$ und $c = mgl$ gegeben. Verwenden Sie in den nachstehenden Teilaufgaben die damit hergeleiteten vereinfachten Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{11}{2}mgl & -\frac{3}{2}mg \\ -\frac{3}{2}mg & \frac{3mg}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems.

c) Bestimmen Sie die Eigenformen des Systems und skizzieren Sie diese.

d) Das System wird in der Form $\varphi = \frac{1}{l}$ und $x = -\frac{1}{3}$ ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen. Geben Sie den zeitlichen Verlauf der einsetzenden Schwingung an.

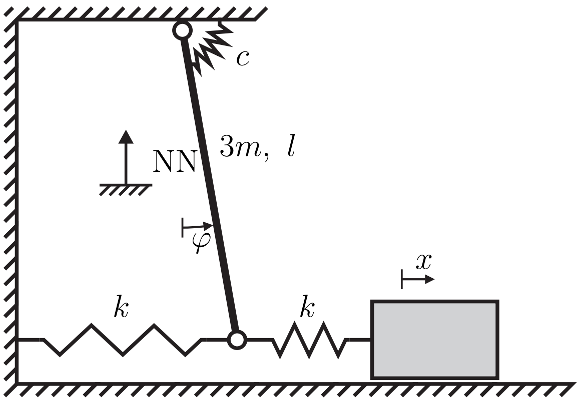
*Gegeben:* $m$, $l$, $k$, $c$, $g$.

*Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe darf von vornherein davon ausgegangen werden, dass die Federn nur Verschiebungen in horizontale Richtung erfahren.*

**Musterlösung - Aufgabe 3**

a) Bewegungsgleichungen (Methode nach Lagrange)

- System in allgemeiner Lage:




- Generalisierte Koordinaten: $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$.
- Massenträgheitsmoment Stab:

$$\Theta_{\mathsf{A}} = \frac{1}{12}(3m)l^2 + 3m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2$$

- Kinetische Energie:

$$T_{\text{Trans}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2}\Theta_{\mathsf{A}}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow \quad T = T_{\text{Trans}} + T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

- Potentielle Energie:

$$V_{\text{Lage}} = 3mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) - mg\frac{l}{2}$$
$$V_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}c\varphi^2 + \frac{1}{2}k(l\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}k(x - l\sin\varphi)^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad V &= V_{\text{Lage}} + V_{\text{Feder}}\\ &= 3mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) - mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}c\varphi^2 + \frac{1}{2}k(l\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}k(x - l\sin\varphi)^2\\ &= 3mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) - mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}c\varphi^2 + \frac{1}{2}kl^2\sin^2\varphi + \frac{1}{2}k(x^2 - 2xl\sin\varphi + l^2\sin^2\varphi)\end{aligned}$$

- Quadratische Approximation:

  – Kinetische Energie → keine Approximation erforderlich

– Potentielle Energie

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$$
$$\sin^2\varphi \approx \varphi^2$$
$$x\sin\varphi \approx x\varphi$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{3}{4}mgl\varphi^2 - mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}c\varphi^2 + \frac{1}{2}kl^2\varphi^2 + \frac{1}{2}k(x^2 - 2lx\varphi + l^2\varphi^2)$$
$$= -mg\frac{l}{2} + \left(\frac{3}{4}mgl + \frac{1}{2}c + kl^2\right)\varphi^2 + \frac{1}{2}kx^2 - klx\varphi$$

- Matrixeinträge
  - Massenmatrix

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = ml^2\dot{\varphi}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{x}$$

$$m_{11} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1^2} = ml^2$$
$$m_{22} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_2^2} = m$$
$$m_{12} = m_{21} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} = 0$$

  - Steifigkeitsmatrix

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \left(\frac{3}{2}mgl + c + 2kl^2\right)\varphi - klx$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = kx - kl\varphi$$

$$k_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = \frac{3}{2}mgl + c + 2kl^2$$
$$k_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = k$$
$$k_{12} = k_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = -kl$$

- Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2}mgl + 2kl^2 + c & -kl \\ -kl & k \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{0}}$$

b) Bestimmung Eigenkreisfrequenzen

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left(m_{11}m_{22} - m_{12}^2\right)\omega^4 - (m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} - 2m_{12}k_{12})\,\omega^2 + \left(k_{11}k_{22} - k_{12}^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2l^2\omega^4 - \left(ml^2\frac{3mg}{2l} + m\frac{11}{2}mgl\right)\omega^2 + \left(\frac{11}{2}mgl\frac{3mg}{2l} - \left(-\frac{3}{2}mg\right)^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m^2l^2\omega^4 - 7m^2gl\,\omega^2 + 6m^2g^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \omega_{1,2}^2 &= \frac{7m^2gl \mp \sqrt{(7m^2gl)^2 - 4m^2l^2 6m^2g^2}}{2m^2l^2} \\
&= \frac{7m^2gl \mp \sqrt{49m^4g^2l^2 - 24m^4g^2l^2}}{2m^2l^2} \\
&= \frac{7}{2}\frac{g}{l} \mp \frac{5}{2}\frac{g}{l} \\
\Rightarrow \quad \omega_1^2 &= 1\frac{g}{l} \\
\omega_2^2 &= 6\frac{g}{l} \\
\Rightarrow \quad \omega_1 &= \sqrt{1\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \\
\omega_2 &= \sqrt{6\frac{g}{l}} \approx 2{,}4495\sqrt{\frac{g}{l}}
\end{aligned}
$$

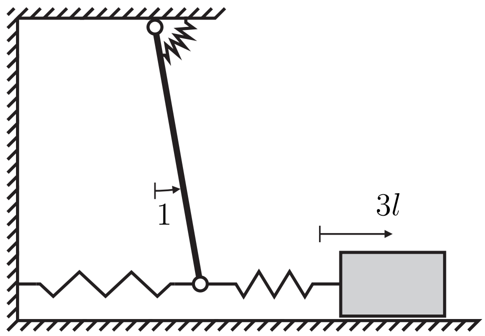
c) Eigenformen

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= -\frac{-m_{11}\omega_1^2 + k_{11}}{-m_{12}\omega_1^2 + k_{12}} = -\frac{-ml^2\frac{g}{l} + \frac{11}{2}mgl}{-\frac{3}{2}mg} = 3l \\
\kappa_2 &= -\frac{-m_{11}\omega_2^2 + k_{11}}{-m_{12}\omega_2^2 + k_{12}} = -\frac{-ml^2 6\frac{g}{l} + \frac{11}{2}mgl}{-\frac{3}{2}mg} = -\frac{1}{3}l
\end{aligned}
$$

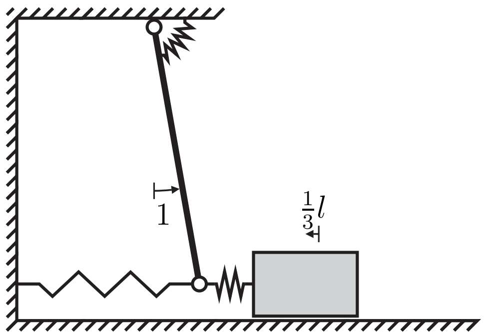
$$
\Rightarrow \quad \mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3}l \end{bmatrix}
$$

Skizze:

$\mathbf{\Phi}_1$:




$\mathbf{\Phi}_2$:




d) Eine Auslenkung der Form $\varphi = \frac{1}{l}$ und $x = -\frac{1}{3}$ entspricht einer Auslenkung in der zweiten Eigenform. Somit verläuft die einsetzende Schwingung gemäß

$$
\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t).
$$