Modulprüfung

Dynamik

13. März 2025

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

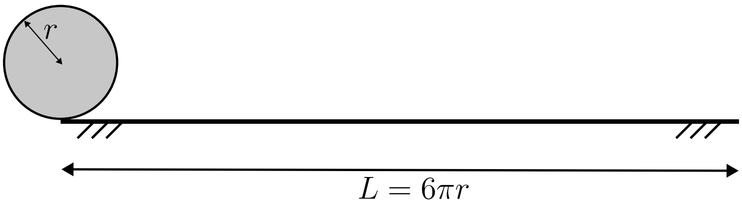
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

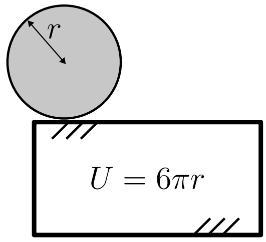
Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)

a) Ein starrer kreisförmiger Körper mit Radius r rollt ohne zu Gleiten auf zwei verschiedenen Oberflächen. Wie viele ganze Umdrehungen um seinen Schwerpunkt hat der Körper vollzogen, wenn er auf einer geraden Oberfläche der Länge $L = 6\pi r$ rollt? Wie viele ganze Umdrehungen sind es, wenn er entlang der Außenkante eines Rechtecks mit Umfang $U = 6\pi r$ einmal wieder bis zum Ausgangspunkt rollt? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.





Gegeben: r.

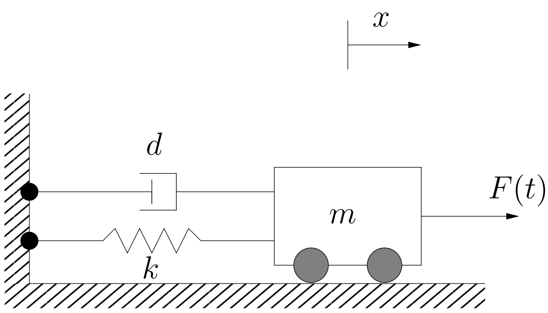
b) b1) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf einer freien, schwach gedämpften Schwingung für einen Freiheitsgrad x als Funktion der Zeit mit den Anfangswerten $x(t = 0) < 0$ und $\dot{x}(t = 0) < 0$.

b2) Ist die Kreisfrequenz dieser Schwingung genau so groß, kleiner oder größer als die Eigenkreisfrequenz des zugehörigen ungedämpften Systems? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

c) Welche Klasse von Kräften tritt nicht im Prinzip der virtuellen Kräfte auf und warum?

d) Wie lauten die Newtonschen Axiome? Welche Aussagen treffen sie, und falls möglich, geben Sie die entsprechenden Formeln an.

e) Bestimmen Sie für das abgebildete System mit Federkonstante k, Dämpfungskonstante d, Masse m und zeitlich veränderlicher Kraft $F(t)$ die Lagrange-Funktion sowie die resultierende, generalisierte Nicht-Potentialkraft.



Gegeben: k, d, m, $F(t)$.

f) Führen Sie eine formelle Linearisierung der Funktion $f(\varphi, \dot{\varphi}) = \sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2$ um den Punkt $\varphi = 0$ und $\dot{\varphi} = 0$ durch.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) – Umfang des kreisförmigen Körpers

$$U = 2\,\pi\,r$$

Anzahl Umrundungen

$$n = \frac{6\pi r}{2\pi r} = 3$$

Alternative Lösung:

$$x = \varphi\, r \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{x}{r} = \frac{6\,\pi\,r}{r} = 6\,\pi$$

Anzahl Umrundungen

$$n = \frac{\varphi}{2\,\pi} = 3$$

– Zusätzlich zu den 3 Umrundungen kommen 4 Vierteldrehungen an den Ecken hinzu

$$n = \frac{6\pi r}{2\pi r} + 4\,\frac{1}{4} = 4$$

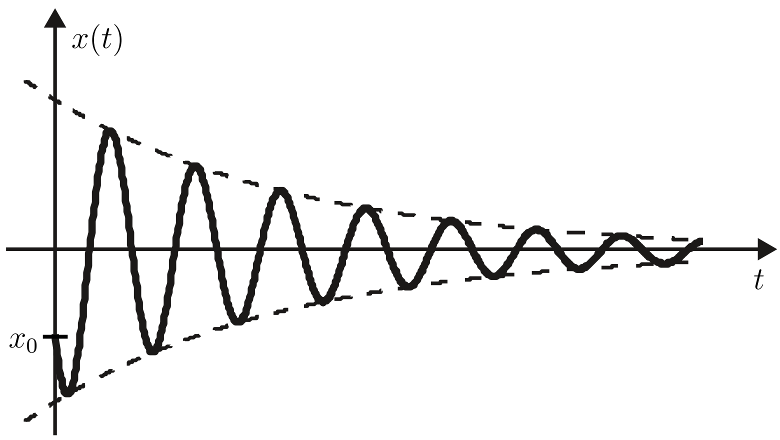
Alternative Lösung:

$$\varphi = \frac{x}{r} + \frac{\Pi}{2}\,4 = 8\,\pi$$

Anzahl Umrundungen

$$n = \frac{\varphi}{2\,\pi} = 4$$

b) b1) Skizze:



Exponentiell abfallende Amplitude , Anfangswerte $x(t=0) < 0$, $\dot{x}(t=0) < 0$.

b2) Die gedämpfte Kreisfrequenz $\omega_d = \omega\sqrt{1-D^2}$, mit dem Lehrschen Dämpfungsmaß $0 < D < 1$ für schwach gedämpfte Systeme ist kleiner als die Eigenkreisfrequenz ω, weil $\sqrt{1-D^2} < 1$ und somit $\omega_d < \omega$.

c) Zwangskräfte , leisten keine Arbeit

d) – Trägheitsprinzip: „Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn keine Kraft an ihm angreift.“

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$$

– Kinetisches Grundgesetz: „Die auf den Körper einwirkende Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses.“

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a} \left(= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \right)$$

– Wechselwirkungsprinzip: „actio est reactio“

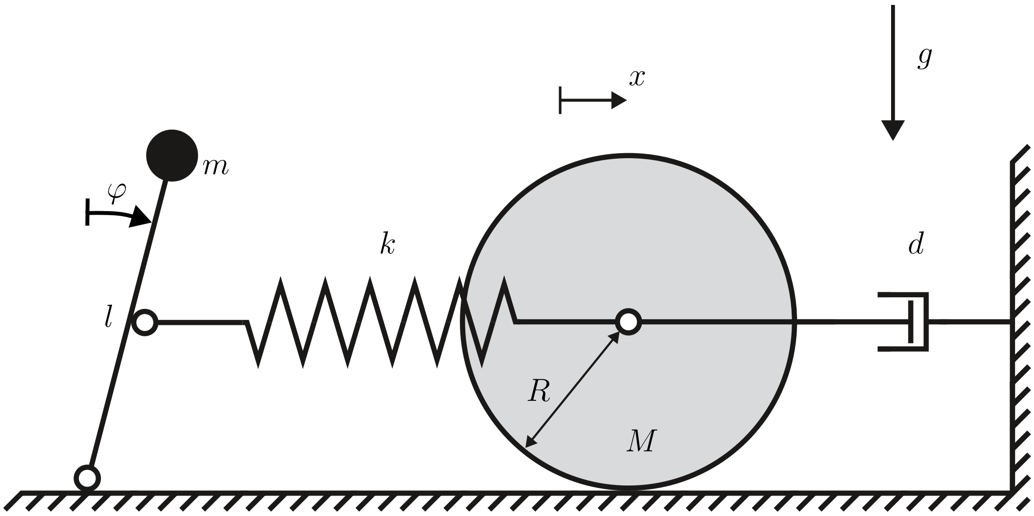
e)

$$L = T - V = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\,c\,x^2$$
$$\tilde{Q} = \tilde{\boldsymbol{F}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \begin{bmatrix} F(t) - d\,\dot{x} \\ \tilde{F}_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial y_0}{\partial x} \end{bmatrix} = F(t) - d\,\dot{x}$$

f) Linearisierung:

$$\begin{aligned} \mathrm{Lin}\left[\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2\right]_{\varphi=0,\dot{\varphi}=0} &= \sin(0)\cos(0)0^2 + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2\right)\Big|_{\varphi=0,\dot{\varphi}=0}(\varphi - 0) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\left(\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2\right)\Big|_{\varphi=0,\dot{\varphi}=0}(\dot{\varphi} - 0) \\ &= 0 + 0\cdot(\varphi - 0) + 0\cdot(\dot{\varphi} - 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte, kreisförmige, starre Körper mit dem Radius R und der Masse M rollt ohne zu gleiten auf einer ebenen Unterlage. Die Position des Körperschwerpunkts wird über die Koordinate x beschrieben. Im Schwerpunkt ist eine feststehende Achse angebracht, die während der Bewegung des Körpers nicht mitrotiert. Diese Achse ist, wie abgebildet, über eine Feder mit Federsteifigkeit k an ein Überkopfpendel gekoppelt und durch einen Dämpfer mit Dämpfungskonstante d mit der Umgebung verbunden. Das Überkopfpendel besteht aus einem masselosen Stab der Länge $l = 2R$ und einer Punktmasse m. Das System ist so ausgelegt, dass die Walze stets in Kontakt mit dem Untergrund bleibt. Für $x = 0$ und $\varphi = 0$ ist die Feder spannungsfrei. Auf das System wirkt die Erdbeschleunigung g.

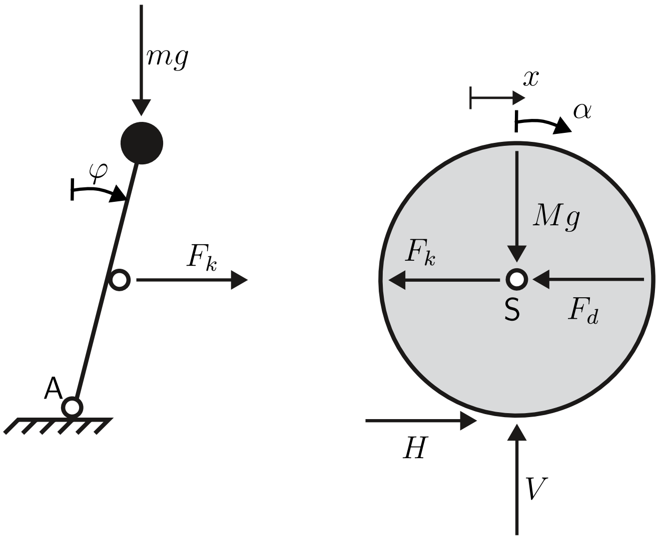
Hinweis: Für die Federkraft sollen nur horizontale Anteile berücksichtigt werden.

Bestimmen Sie die nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Systems in den generalisierten Koordinaten x und φ mithilfe der synthetischen Methode.

Gegeben: M, m, k, d, R, $l = 2R$, g.

Musterlösung - Aufgabe 2

- Freischnitt in allgemeiner Lage



mit:

$F_k = k(x - R\sin(\varphi))$
$F_d = d\dot{x}$

- Kinematik

$$\alpha = \frac{x}{R} \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{x}}{R} \quad \ddot{\alpha} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

- Massenträgheitsmomente

$$\Theta_S = \frac{1}{2}MR^2 \quad \Theta_A = ml^2 = 4mR^2$$

- Herleitung Bewegungsgleichung

$\boxed{2}$: Schwerpunktsatz: $M\ddot{x} = -F_k - F_d + H$ (1)

Drallsatz: $\Theta_S\,\ddot{\alpha} = -HR$

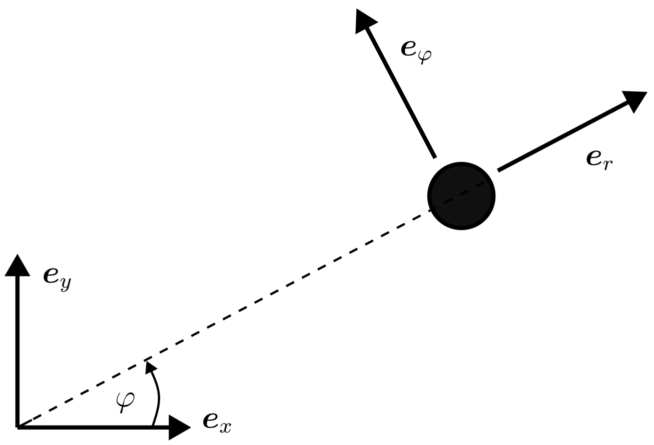
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}M\ddot{x} = H \tag{2}$$

$\boxed{1}$: Drallsatz: $\Theta_A\ddot{\varphi} = 2mgR\sin(\varphi) + F_kR\cos(\varphi)$ (3)

$$\Rightarrow \quad \text{(2) in (1):} \quad \frac{3}{2}M\ddot{x} + d\dot{x} + k(x - R\sin(\varphi)) = 0$$

$$\text{(3):} \quad \Theta_A\ddot{\varphi} - 2mgR\sin(\varphi) - k(x - R\sin(\varphi))R\cos(\varphi) = 0$$

3. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)



Ein Massepunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius R. Im gegebenen kartesischen Koordinatensystem sind die Positionen als $x(t)$ und $y(t)$ und der Beschleunigungsvektor als

$$\boldsymbol{a}(t) = \Big(-by(t) - b^2t^2x(t)\Big)\,\boldsymbol{e}_x + \Big(bx(t) - b^2t^2y(t)\Big)\,\boldsymbol{e}_y$$

bekannt. Dabei ist b eine gegebene Konstante. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Drücken Sie $x(t)$ und $y(t)$ als Funktion des Drehwinkel $\varphi(t)$ aus.

b) Transformieren Sie den gegebenen Beschleunigungsvektor in das dargestellte Polarkoordinatensystem (siehe Hinweis unten).

c) Bestimmen Sie $\dot{\varphi}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$, indem Sie ihr Ergebnis aus b) mit der allgemeinen Form des Beschleunigungsvektors in Polarkoordinaten vergleichen. Wie nennt man eine solche Bewegung?

d) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor in Polarkoordinaten.

e) Geben Sie den zeitlichen Verlauf des Drehwinkels $\varphi = \varphi(t)$ an, wenn sich der Massepunkt zu einer gegebenen Zeit $t = t_0$ bei $x = 0$ und $y = R$ befindet.

Gegeben: R, b.

Hinweis: Die Transformationsbeziehungen zwischen den Basisvektoren lauten

$$\boldsymbol{e}_x = \cos(\varphi)\boldsymbol{e}_r - \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{e}_y = \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_r + \cos(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Sollten Sie a) - d) nicht erfolgreich bearbeitet haben, können Sie für Aufgabenteil e) von einer linearen Bahngeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t) = t$ ausgehen.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Polarkoordinaten, Angabe mit konstantem Radius $r = R =$ konst. so, dass

$$x(t) = R\cos(\varphi(t)), \qquad y(t) = R\sin(\varphi(t)). \tag{4}$$

b) Transformationsbeziehung der normierten Basisvektoren

$$\boldsymbol{e}_x = \cos(\varphi)\boldsymbol{e}_r - \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{e}_y = \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_r + \cos(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi,$$

sowie Beziehung (4) in gegebenen Beschleunigungsvektor einsetzen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t) &= \left(-bR\sin(\varphi) - b^2t^2R\cos(\varphi)\right)(\cos(\varphi)\boldsymbol{e}_r - \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi) \\ &\quad + \left(bR\cos(\varphi) - b^2t^2R\sin(\varphi)\right)(\sin(\varphi)\boldsymbol{e}_r + \cos(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi) \\ &= bR\sin^2(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi - b^2t^2R\cos^2(\varphi)\boldsymbol{e}_r - b^2t^2R\sin^2(\varphi)\boldsymbol{e}_r + bR\cos^2(\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi \\ &= -b^2t^2R\boldsymbol{e}_r + bR\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

c) Vergleich mit der allgemeinen Form bei konstantem Radius ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$):

$$\boldsymbol{a}(t) = -r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{e}_r + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

zeigt: $\dot{\varphi}(t) = bt$, $\ddot{\varphi}(t) = b$. Ergo handelt es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung auf einer Kreisbahn.

d) Allgemeine Form bei konstantem Radius

$$\boldsymbol{v}(t) = r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

Also hier:

$$\boldsymbol{v}(t) = Rbt\boldsymbol{e}_\varphi$$

e) Verlauf $\varphi(t)$ durch Integration und Einführung einer Integrationskonstante c

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}bt^2 + c$$

Vorgegebener Wert $\varphi(t = t_0) = \frac{\pi}{2}$ so dass

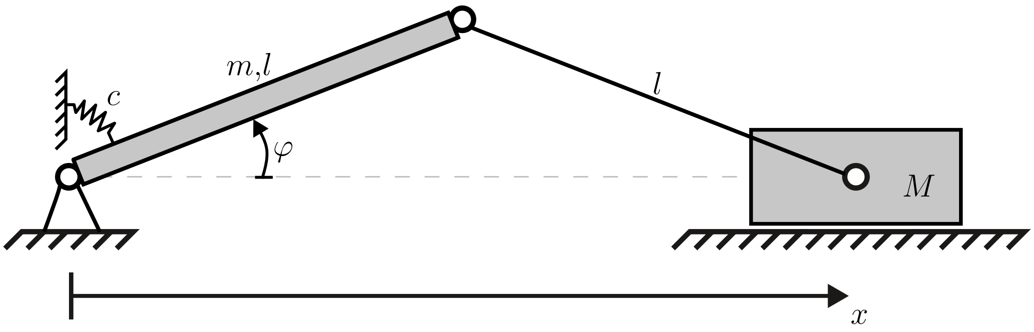
$$\frac{1}{2}bt_0^2 + c = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}bt_0^2$$

Endgültiger Verlauf

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}b\left(t^2 - t_0^2\right) + \frac{\pi}{2}$$

Hinweis: Mit dem Hinweis bei Nichtbearbeitung von a) - d) erhält man hier das gleiche Ergebnis mit $b = 1$.

4. Aufgabe: (ca. 21 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte dynamische System besteht aus einem homogenen Stab (Körper I: Länge l, Masse m), einem masselosen Stab (Körper II: Länge l) und einem Starrkörper (Körper III: Masse M), welcher reibungsfrei gleitet und nicht vom Untergrund abhebt. Alle Körper sind gelenkig miteinander verbunden. Zwischen Körper I und der Umgebung befindet sich eine Drehfeder mit Drehfedersteifigkeit c, welche für $\varphi = 0$ spannungsfrei ist. Der Einfluss aus Erdbeschleunigung soll vernachlässigt werden.

a) Charakterisieren Sie die Bewegung der starren Körper I-III (reine Translation, reine Rotation um einen raumfesten Punkt, allgemeine Bewegung mit Translation und Rotation).

b) Stellen Sie die kinematische Zwangsbedingung zwischen der Koordinate x und der generalisierten Koordinate φ auf, sodass Sie eine Funktion $x = x(\varphi)$ erhalten.

c) Stellen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinate φ auf.

d) Bestimmen Sie die nichtlineare Bewegungsgleichung des Systems für die generalisierte Koordinate φ mithilfe der Lagrange-Gleichung 2. Art.

Die linearisierte Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen soll nun gegeben sein:

$$\Theta\ddot{\varphi} + c\varphi = 0.$$

e) Geben Sie einen allgemeinen Lösungsansatz für $\varphi(t)$ an und bestimmen Sie <u>alle</u> darin vorkommenden Unbekannten für die Anfangswerte $\varphi(t=0) = 0$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 1$.

Gegeben: M, m, l, c, Θ.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Bewegung der starren Körper I-III:

I reine Rotation um einen raumfesten Punkt (Auflager)

II allgemeine Bewegung mit Translation und Rotation

III reine Translation in x-Richtung

b) kinematische Zwangsbedingung:

$$x = 2l\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -2l\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

c) kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{A}}^{1}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad \text{mit} \quad \Theta_{\mathrm{A}}^{1} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2 \\ &= \frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{A}}^{1}\dot{\varphi}^2 + 2Ml^2\sin^2(\varphi)\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

potentielle Energie (keine Lageenergie):

$$V = V^{\text{Drehfeder}} = \frac{1}{2}c\varphi^2$$

d) Methode nach Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \Theta_{\mathrm{A}}^{1}\dot{\varphi} + 4Ml^2\sin(\varphi)^2\dot{\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= \Theta_{\mathrm{A}}^{1}\ddot{\varphi} + 4Ml^2(\sin(\varphi)^2\ddot{\varphi} + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2) \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 4Ml^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= c\varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\Theta_{\mathrm{A}}^{1} + 4Ml^2\sin(\varphi)^2)\ddot{\varphi} + 4Ml^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 + c\varphi = 0$$

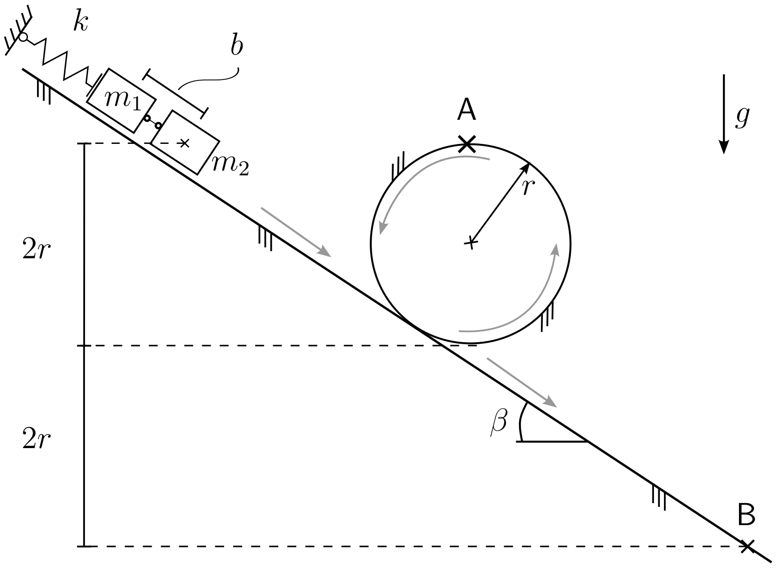
e)
- Lösungsansatz für homogene DGL einer ungedämpften Schwingung

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{\Theta}}$$

- Konstanten A, und B werden aus Anfangswerten bestimmt

$$\begin{aligned} \varphi(t=0) = 0 &= A\cos(0) + B\sin(0) \quad \Rightarrow \quad A = 0 \\ \dot{\varphi}(t=0) = 1 &= -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) \quad \Rightarrow \quad B = 1/\omega = \sqrt{\frac{\Theta}{c}} \end{aligned}$$

5. Aufgabe: (ca. 19 % der Gesamtpunkte)



Zwei Wagen (Punktmassen m_1 und m_2) einer Achterbahn starten in Ruhe und sollen einen kreisförmigen Looping mit dem Radius r durchfahren. Die beiden Wagen sind im Abstand $b > 0$ über die gesamte Fahrt fest miteinander verbunden und werden durch Vorspannung einer Feder der Steifigkeit k in Bewegung versetzt. Dabei wird die Feder um die Länge u so zusammengedrückt, dass die Wagen ihre Ruheposition nicht verändern. Die Bewegung kann zunächst als reibungsfrei angenommen werden. Die Wagen sind auf Schienen geführt und können die Fahrbahn nicht verlassen (kein Herunterfallen im Looping möglich).

Hinweis: Zur Bearbeitung kann das Massenpunktsystem als ein Massenpunkt im Schwerpunkt betrachtet werden. Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinader bearbeitet werden.

a) Geben Sie die minimale Vorspannlänge u der Feder an, die benötigt wird, damit die Wagen den Looping durchfahren können. Begründen Sie ohne Rechnung.

Ab jetzt sollen Luft- und Rollwiderstand der beiden Wagen zusammen als eine konstante Nichtpotentialkraft $R = \frac{mg}{4}$ berücksichtigt werden, die über die gesamte Strecke entgegen der Bewegungsrichtung wirkt.

b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung von R die benötigte Vorspannlänge u, damit die Wagen, sobald der vordere Wagen in Punkt B ankommt, die Geschwindigkeit v_B haben.

c) In B findet ein (gerader, zentrischer) teilplastischer Stoß mit einer ruhenden Masse M statt. Die Geschwindigkeit der Wagen soll dabei in B gedrittelt werden. Berechnen Sie die dafür benötigte Stoßzahl e.

Gegeben: r, $b > 0$, $m_1 = m_2 = m$, $\beta = 30°$, $M = \frac{4}{3}m$, $R = \frac{mg}{4}$, k, g, v_B.

Musterlösung - Aufgabe 5

a) Da Wagen m_2 bereits auf der Höhe von Punkt A liegt, muss der gemeinsame Schwerpunkt beider Wagen höher als der Punkt A liegen. Da keine Nichtpotentialkräfte wirken, gilt die Energieerhaltung ohne Federpotential wie folgt:

$$V_0^{\text{Lage}} = T_{\text{A}} + V_A^{\text{Lage}}$$

da $V_0^{\text{Lage}} > V_A^{\text{Lage}}$ kann Punkt A mit $v_A > 0$ ohne zusätzliches Federpotential ($u = 0$) erreicht werden.

b) Nullniveau bei Punkt B gewählt.
Schwerpunkt des Massenpunktsystems liegt in der Mitte der Kopplung

$$V_0^{\text{Lage}} = 2mg\left(4r + \frac{1}{2}\sin 30°b\right) = mg\left(8r + \frac{b}{2}\right)$$

$$V_0^{\text{Feder}} = \frac{1}{2}ku^2$$

$$T_0 = 0$$

$$V_B = 2mg\frac{b}{4} = mg\frac{b}{2}$$

$$T_B = \frac{1}{2}2mv_B^2 = mv_B^2$$

Arbeit der Nichtpotentialkräfte

$$W^*|_0^B = -\int_0^B R \,\mathrm{d}s = -Rr(8+2\pi) \quad \text{mit Gesamtstrecke } s = 8r + 2\pi r$$

Arbeitssatz

$$W|_0^B = T_B - T_0$$

$$V_0^{\text{Lage}} + V_0^{\text{Feder}} + T_0 + W^*|_0^B = V_B + T_B$$

$$\Rightarrow mg\left(8r + \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{2}ku^2 - Rr(8+2\pi) = mv_B^2 + mg\frac{b}{2}$$

$$\text{mit } R = \frac{mg}{4}$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{(\pi - 12)\,\frac{mgr}{k} + 2\frac{m}{k}v_B^2}$$

c) Impulsbilanz für geraden zentrischen Stoß

$$2m\overline{v}_B - 2mv_B = Mv_2 - M\overline{v}_2$$

$$\text{mit } \overline{v}_B = \frac{v_B}{3} \text{ und } v_2 = 0$$

$$\Rightarrow -2m\frac{2}{3}v_B = -M\overline{v}_2$$

$$\text{mit } M = \frac{4}{3}m$$

$$\overline{v}_2 = v_B$$

Stoßzahl e

$$e = -\frac{\overline{v}_B - \overline{v}_2}{v_B - v_2} = -\frac{(\frac{1}{3} - 1)v_B}{v_B} = \frac{2}{3}$$