Modulprüfung

Dynamik

14. März 2024

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 10 % der Gesamtpunkte)

Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

a) ☐ Zwangskräfte wirken senkrecht zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

☐ Zwangskräfte wirken tangential zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

☐ Zwangskräfte wirken unabhängig von den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

b) ☐ Der Drallsatz für einen starren Körper ist aus dem Drallsatz für einen Massepunkt herleitbar.

☐ Der Drallsatz für einen starren Körper ist ein eigenständiges Postulat.

☐ Der Drallsatz für einen starren Körper ist aus dem Impulssatz (Schwerpunktsatz) für den starren Körper herleitbar.

c) ☐ Der Arbeitssatz für einen Massepunkt ist aus dem Newton'schen Bewegungsgesetz ableitbar.

☐ Der Arbeitssatz stellt ein eigenständiges Postulat dar.

☐ Der Arbeitssatz ist ein Sonderfall des Energieerhaltungssatzes.

d) Bei einer gedämpften Schwingung wird festgestellt, dass nach 10 Vollschwingungen die Amplitude auf $\frac{1}{10}$ ihres Anfangswertes abgefallen ist.

Bestimmen Sie das Lehr'sche Dämpfungsmaß D.

Lösung 1. Aufgabe:

a) Zwangskräfte wirken senkrecht zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

b) Der Drallsatz für einen starren Körper ist ein eigenständiges Postulat.

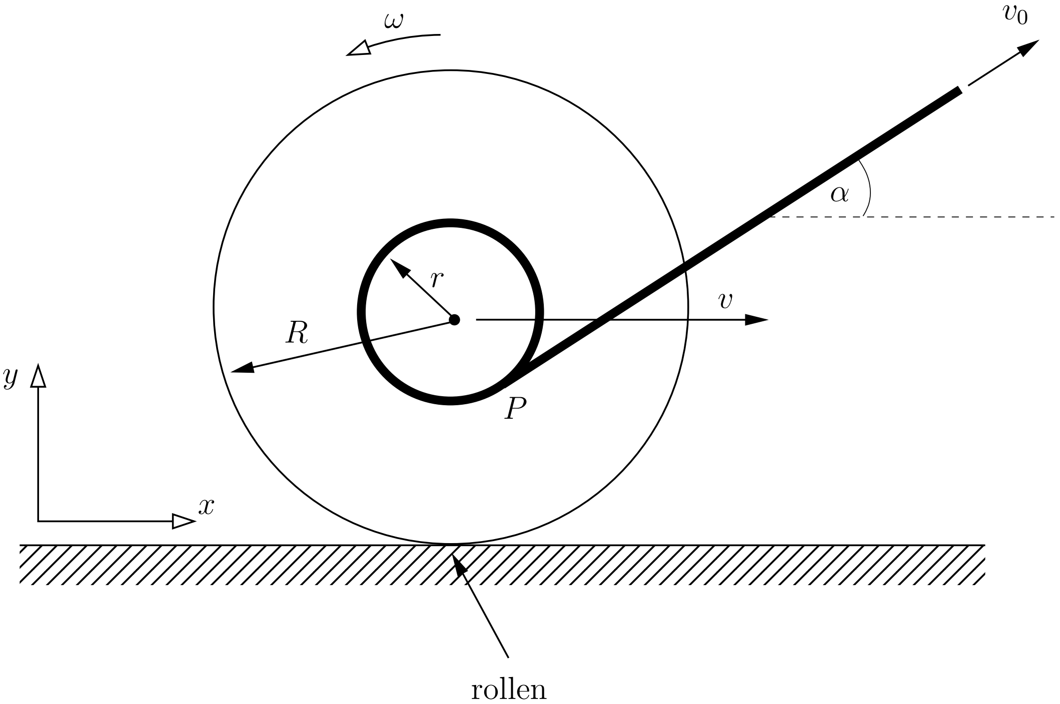
c) Der Arbeitssatz für einen Massepunkt ist aus dem Newton'schen Bewegungsgesetz ableitbar.

d) Lehr'sches Dämpfungsmaß

$$\frac{x_{max}}{x_{red}} = e^{-D\omega(t_0-(t_0+10T))} = e^{-D2\pi 10} = 10$$

$$D = \frac{\ln 10}{20\pi} = 0,0366$$

2. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Eine Stufenwalze mit einem aufgewickelten Seil („Garnrolle”) rollt auf einer Unterlage, wobei am Seilende unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v_0 gezogen wird.

a) Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeit ω der Walze (siehe Skizze) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Walzenmittelpunktes und geben Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ an.

b) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}_P$ des Punktes P in welchem das Seil die Walze verlässt im skizzierten x, y-Koordinatensystem in Abhängigkeit von v an.

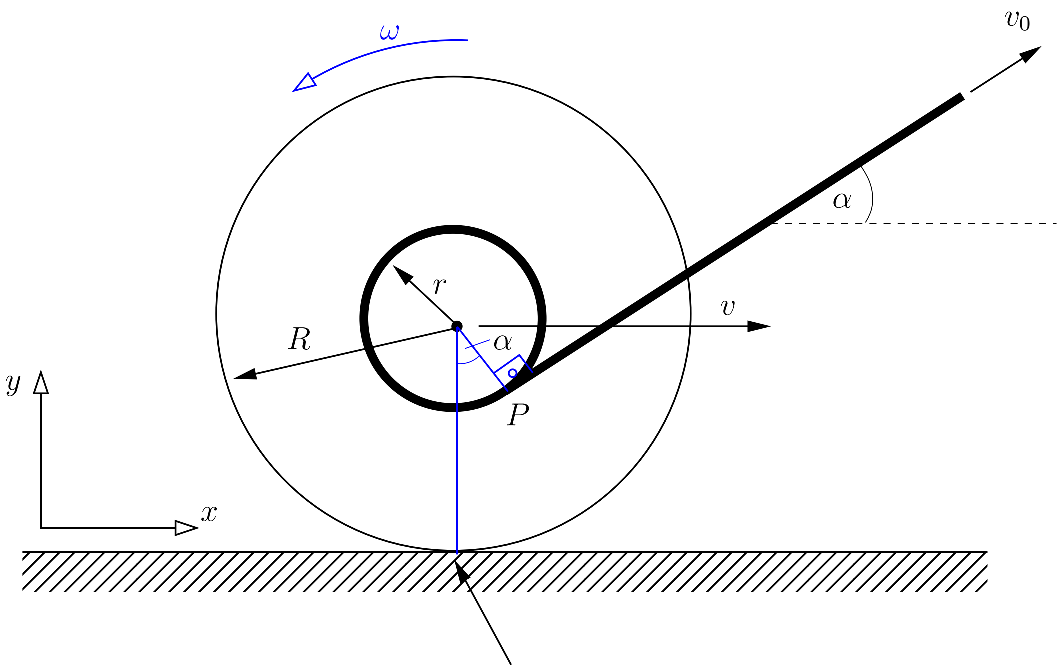
c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v des Walzenmittelpunktes in Abhängigkeit vom Winkel α und der Geschwindigkeit v_0 des Seilendes.

   Hinweis: Die Richtung des Seils kann durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_S = \cos\alpha \boldsymbol{e}_x + \sin\alpha \boldsymbol{e}_y$ beschrieben werden.

d) Was passiert für $\cos\alpha = \dfrac{r}{R}$?

Gegeben: v_0, r, R

Lösung 2. Aufgabe:



a) Winkelgeschwindigkeit ω aus Rollbedingung $v = -\omega R \quad \Longrightarrow \quad \omega = -\dfrac{v}{R}$.

Winkelgeschwindigkeitsvektor $\quad \boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$.

b) Geschwindigkeit von Punkt P = Translationsgeschwindigkeit $v\boldsymbol{e}_x$ von Walzenmittelpunkt + Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$ von P um Walzenmittelpunkt, wobei $\boldsymbol{\rho} = r(\sin\alpha\boldsymbol{e}_x - \cos\alpha\boldsymbol{e}_y)$ der Vektor vom Walzenmittelpunkt zum Punkt P ist.

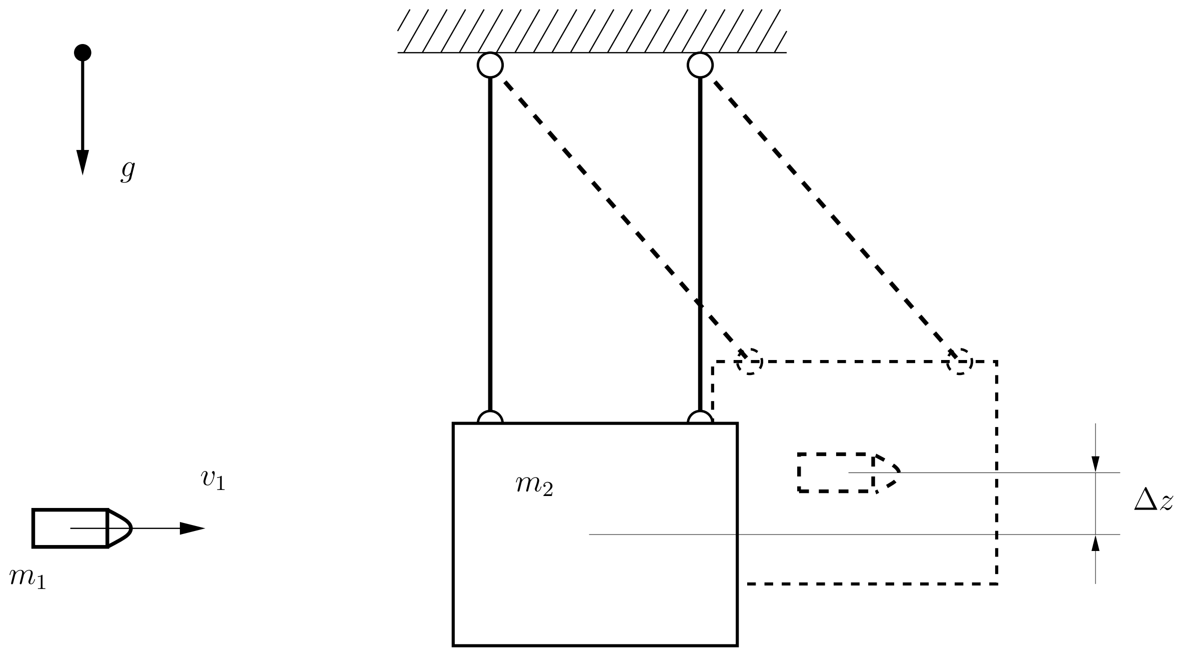
$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_P &= v\boldsymbol{e}_x + \omega r \boldsymbol{e}_z \times (\sin\alpha\boldsymbol{e}_x - \cos\alpha\boldsymbol{e}_y) \\
&= v\boldsymbol{e}_x - v\frac{r}{R}(\sin\alpha\boldsymbol{e}_y + \cos\alpha\boldsymbol{e}_x) \\
&= v\Big((1 - \frac{r}{R}\cos\alpha)\boldsymbol{e}_x - \frac{r}{R}\sin\alpha\boldsymbol{e}_y\Big)
\end{aligned}
$$

c) Die Geschwindigkeit v_0 des Seilendes ist gleich dem Anteil der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_P$ in Richtung des Seils (= Skalarprodukt mit Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_S$), d.h.

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{e}_S = v\Big((1 - \frac{r}{R}\cos\alpha)\boldsymbol{e}_x - \frac{r}{R}\sin\alpha\boldsymbol{e}_y\Big) \cdot (\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_y) \\
&= v\Big(\cos\alpha - \frac{r}{R}\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{=1}\Big) \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{v_0}{\cos\alpha - r/R}
\end{aligned}
$$

d) Für $\cos\alpha = r/R$ gibt es keine Lösung, die Walze hebt ab bzw. kommt ins Gleiten.

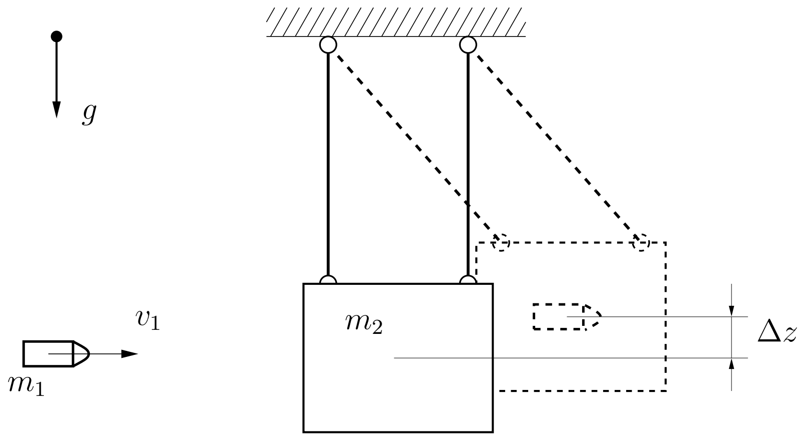
3. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Zur Messung der Geschwindigkeit eines Geschosses (m_1) wird das in der oberen Abbildung dargestellte ballistische Pendel verwendet. Das Geschoss dringt mit einer Geschwindigkeit v_1 in das Pendel (m_2) ein und bleibt stecken (vollplastischer Stoß). Dabei bewegt sich das System um eine Höhe Δz nach oben. Aus dieser Höhendifferenz soll nun die Geschossgeschwindigkeit (v_1) ermittelt werden.

Gegeben: m_1, m_2, g, Δz

Lösung 3. Aufgabe:



- Stoßgesetz:

$$e = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{v_1 - v_2} \qquad |\,\text{plastischer Stoß:}\, e = 0$$
$$\Rightarrow \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$

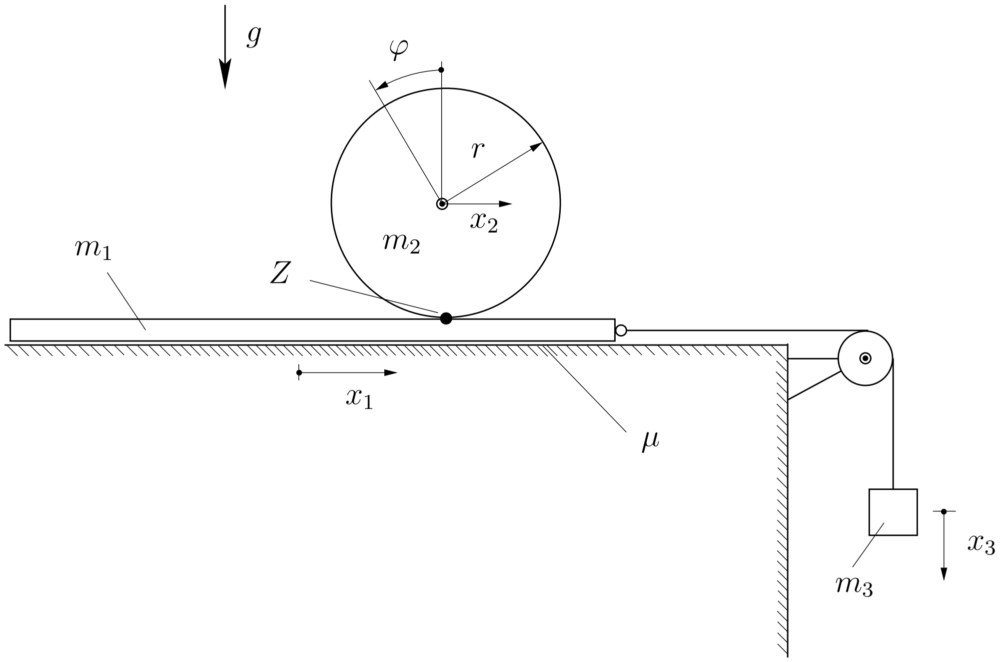
- Impulserhaltung

$$m_1\, v_1 + m_2\, v_2 = m_1\, \bar{v}_1 + m_2\, \bar{v}_2 \qquad |\, v_2 = 0, \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\, \bar{v}_2 \tag{1}$$

- Energieerhaltung nach dem Stoß

$$E_{kin}^{\text{Stoß}} + E_{pot}^{\text{Stoß}} = E_{kin}^{\Delta z} + E_{pot}^{\Delta z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,\bar{v}_2^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)\, g\,\Delta z$$
$$\Leftrightarrow \bar{v}_2 = \sqrt{2\, g\, \Delta z} \qquad |\, \text{in}\,(1)$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2\, g\, \Delta z}$$

4. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Ein Brett (Masse m_1) ist über ein undehnbares Seil mit einem Gewicht (Masse m_3) verbunden. Das Brett liegt auf einer rauen Unterlage (Reibkoeffizient μ) und das Seil wird über eine masselose Rolle umgelenkt. Auf dem Brett liegt im Punkt Z eine homogene Walze(Masse m, Radius r). Das System wird aus dem Ruhezustand losgelassen. Es soll die Zeitspanne der Bewegung betrachtet werden bei der sich die Walze noch auf dem Brett befindet und gleitfrei abrollt.

a) Schneiden Sie die massenbehafteten Körper frei und geben Sie ihre Bewegungsgleichungen an.

b) Bestimmen Sie die kinematischen Beziehungen für die Geschwindigkeiten $\dot{x}_2$ und $\dot{x}_3$ in Abhängigkeit von $\dot{x}_1$ und $\dot{\varphi}$.

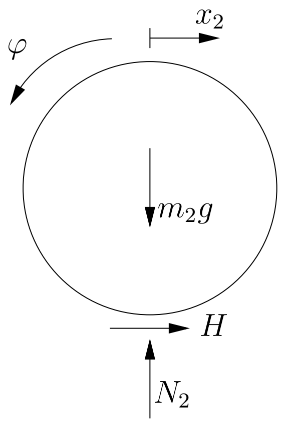
c) Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}_3$ der Masse m_3.

d) Bestimmen Sie den Haftkoeffizienten μ_0 zwischen Unterlage und Brett bei dem das System in Ruhe bleibt.

<u>Gegeben:</u> m_1, m_2, m_3, r, μ, g.

Lösung 4. Aufgabe:

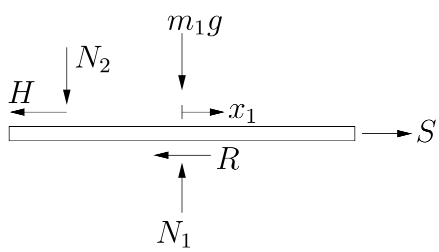
a) <u>Kinetik:</u>



$$m_2 \ddot{x}_2 = H \tag{1}$$

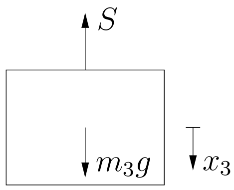
$$0 = N_2 - m_2 g \tag{2}$$

$$\Theta \ddot{\varphi} = H r \qquad \text{mit } \Theta = \frac{1}{2} m_2 r^2 \tag{3}$$



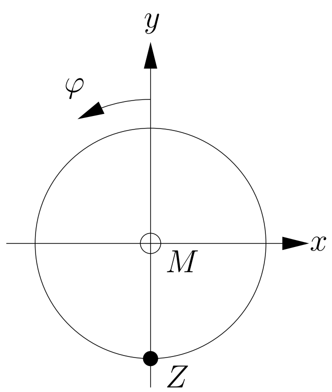
$$m_1 \ddot{x}_1 = -R - H + S \qquad \text{mit } R = \mu N_1 \tag{4}$$

$$0 = N_1 - N_2 - m_1 g \tag{5}$$



$$m_3 \ddot{x}_3 = m_3 g - S \tag{6}$$

b) <u>Kinematik:</u>



$$\dot{x}_2 = -r\dot{\varphi} + \dot{x}_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + r\dot{\varphi} \tag{7}$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{x}_3 = \dot{x}_2 + r\dot{\varphi} \tag{8}$$

c) <u>Beschleunigung $\ddot{x}_3$:</u>

$$\text{mit (1) und (7) in (3):} \qquad r\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}\ddot{x}_1 \tag{9}$$

$$\text{aus (3) mit (9)} \qquad H = \frac{1}{3}m_2\ddot{x}_1 \tag{10}$$

$$\text{(2) und (5) in (4):} \qquad R = \mu g\,(m_2 + m_1) \tag{11}$$

$$\text{aus (4) mit (11), (10), (8) :} \qquad S = m_1\ddot{x}_3 + \mu(m_2 + m_1)g + \frac{1}{3}m_2\ddot{x}_3 \tag{12}$$

$$\text{(12) = (6):} \qquad m_1\ddot{x}_3 + \mu(m_2 + m_1)g + \frac{1}{3}m_2\ddot{x}_3 = m_3 g - m_3\ddot{x}_3$$

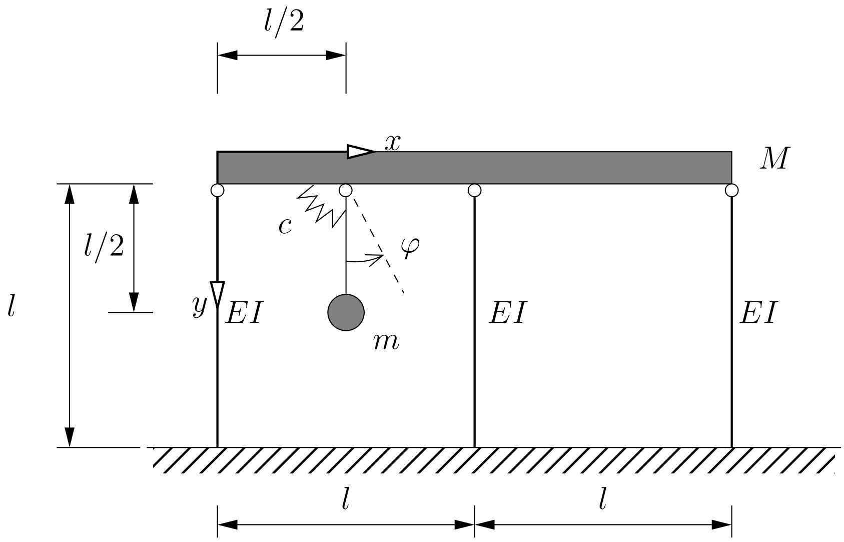
$$\Longrightarrow \qquad \ddot{x}_3 = \frac{m_3 - \mu(m_2 + m_1)}{m_1 + \frac{m_2}{3} + m_3}g$$

c) <u>Gleichgewicht:</u>

$$\ddot{x}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{m_3 g - \mu_0(m_2 + m_1)g}{m_1 + \frac{m_2}{3} + m_3}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_0 = \frac{m_3}{m_1 + m_2}$$

5. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte System eines Rahmens mit einem eingehängten Pendel soll auf das Schwingungsverhalten *für kleine Auslenkungen* untersucht werden. Der Rahmen besteht aus einem Riegel der Masse M und drei masselosen Stützen, die an einem Ende gelenkig verbunden und am anderen Ende eingespannt sind. Das Pendel besteht aus einer masselosen starren Stange der Länge $l/2$, einer Punktmasse m und einer Drehfeder der Steifigkeit c.

a) Geben Sie die Ersatzfedersteifigkeit k der drei Stützen an.

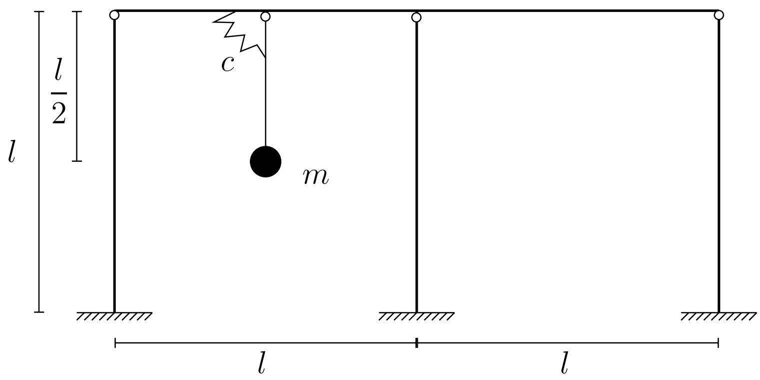
b) Geben Sie die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der beiden Massen im skizzierten x, y - Koordinatensystem in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Koordinaten x und φ an.

c) Stellen Sie die kinematischen und potentielle Energie des Systems auf und berücksichtigen Sie dabei, dass für kleine Winkel $|\varphi| \ll 1$ gilt: $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$.

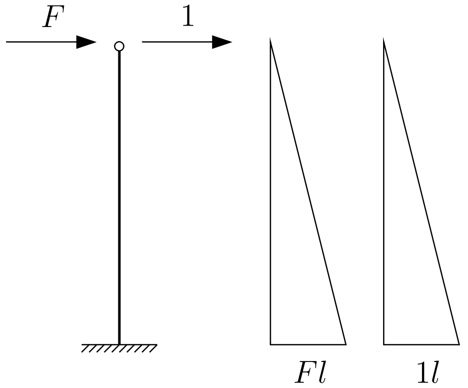
d) Bestimmen Sie mit der *analytischen Methode nach Lagrange* die Bewegungsgleichungen des Systems. Der Einfluss der Erdbeschleunigung darf vernachlässigt werden.

Gegeben: M, m, l, EI, c.

Lösung 5. Aufgabe:

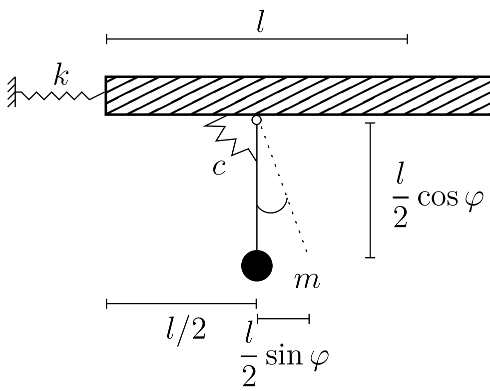


a) Ersatzfedern



$$f = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot Fl \cdot l \cdot l$$
$$= \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EI}$$
$$k = \frac{3EI}{l^3} \cdot 3 = \frac{9EI}{l^3}$$

- Ersatzsystem



Verallgemeinerte Koordinaten:

$$q_1 = x$$
$$q_2 = \varphi$$

b) Orts- und Geschwindigkeitsvektoren:

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} x + l \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x + \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sin\varphi \\ \frac{l}{2}\cos\varphi \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi} \\ -\frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2 &= \dot{x}^2 \\
|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 &= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\dot{x} = \dot{x}^2 + \dot{x}l\cos\varphi\dot{\varphi} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 \\
|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\frac{l}{2}\dot{\varphi} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 = \left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2 \text{ Linearisierung}(\varphi \ll 1)
\end{aligned}
$$

c) Energien:

- kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2$$

- potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2$$

- keine generalisierten Nichtpotentialkräfte

d) Lagrange-Gleichungen: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right) && \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} + \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\right) \\
&\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0 + m\frac{l}{2}\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right) && \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\frac{l}{2}\left(\ddot{x} + \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\right) \\
&\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \\
&\frac{\partial V}{\partial x} = kx \\
&\frac{\partial V}{\partial \varphi} = c\varphi
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichungen:

$$
\begin{bmatrix} M+m & m\frac{l}{2} \\ m\frac{l}{2} & m\frac{l^2}{4} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$