Modulprüfung

Festigkeitslehre

14. März 2025

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

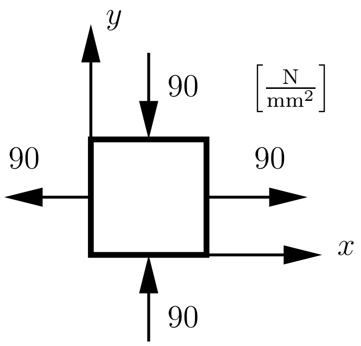
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)

a) Für das unten dargestellte, infinitesimale Element ist ein zweiachsiger Spannungszustand gegeben.

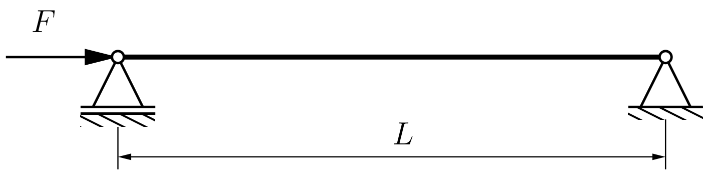


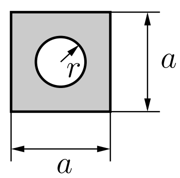
i) Geben Sie die Hauptspannungen und den Winkel zwischen x- und 1-Achse an.

ii) Skizzieren Sie den dazugehörigen Mohrschen Spannungskreis.

iii) Bestimmen Sie die Hauptschubspannungen sowie die dazugehörigen Winkel.

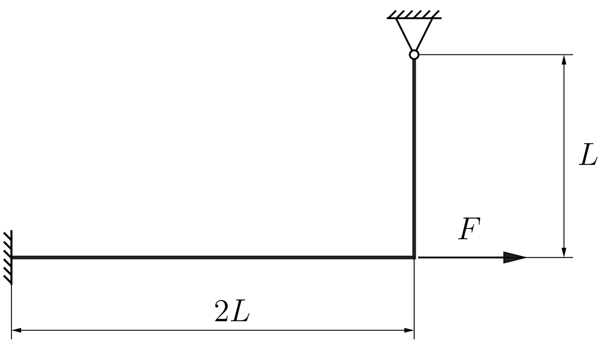
b) Das unten abgebildete, auf Druck beanspruchte System (Länge L, E-Modul E) besitzt den dargestellten Querschnitt (Breite und Höhe a, Innenradius r).
Wie groß darf der Innenradius r maximal sein, damit das System stabil bleibt?





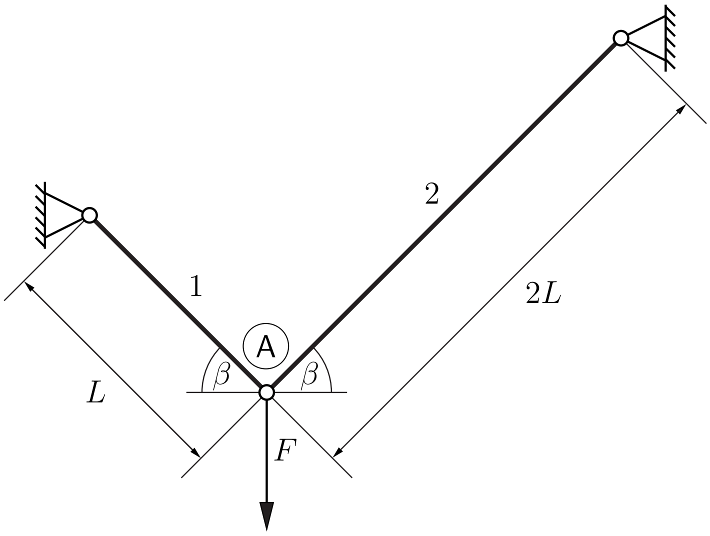
Gegeben: F, L, E, a.

c) Das unten dargestellte System ist 2-fach statisch unbestimmt. Skizzieren Sie fünf verschiedene zulässige statisch bestimmte Grundsysteme, die beispielsweise in Rechenverfahren auf Basis des Prinzips der virtuellen Kräfte genutzt werden könnten.



Gegeben: F, L.

d) Zwei Stäbe sind wie unten dargestellt in Knoten A über ein Gelenk rechtwinklig miteinander verbunden. Sie verfügen über dieselben konstanten Querschnittsflächen A, E-Moduln E und Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T. An Knoten A greift die Last F in vertikaler Richtung an.



i) Berechnen Sie für die gegebene Belastung die vertikale Verschiebung f von Knoten A mithilfe des Arbeitssatzes.

ii) Begründen Sie kurz, warum der Arbeitssatz in Teilaufgabe i) verwendet werden darf.

iii) Bestimmen Sie die Spannungen in den Stäben sowie die Stabdehnungen.

iv) Welche Temperaturdifferenz ΔT müssen die beiden Stäbe erfahren, damit sich Knoten A trotz der gegebenen Belastung nicht verschiebt?

Gegeben: F, L, E, A, α_T, $\beta = 45°$.

Musterlösung - Aufgabe 1

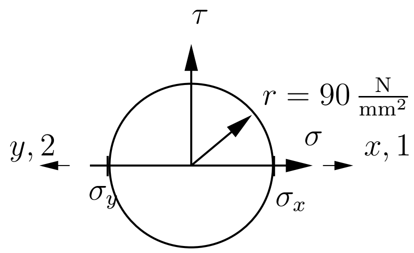
a) i) • Hauptspannungen (direkt ablesbar, da Schubspannung $\tau_{xy} = 0$)

$$\sigma_1 = \sigma_x = 90\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = -90\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}, \quad \sigma_1 > \sigma_2$$

• Winkel zwischen x- und 1-Achse

$$\varphi_1^* = 0°$$

ii) Mohrscher Spannungskreis



iii) • Winkel (siehe z. B. Mohrscher Spannungskreis)

$$2\,\varphi^{**} = \pm 90° \quad \Rightarrow \quad \varphi^{**} = \pm 45°$$

• Hauptschubspannungen (siehe z. B. Mohrscher Spannungskreis)

$$\tau_{\mathrm{max}} = \pm 90\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Alternativ

$$\tau_{\mathrm{max}} = \pm\frac{1}{2}\,(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm 90\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

oder

$$\tau(\varphi = 45°) = -90\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}, \quad \tau(\varphi = -45°) = 90\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

b) • Flächenträgheitsmoment

$$I = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi}{4}\,r^4$$

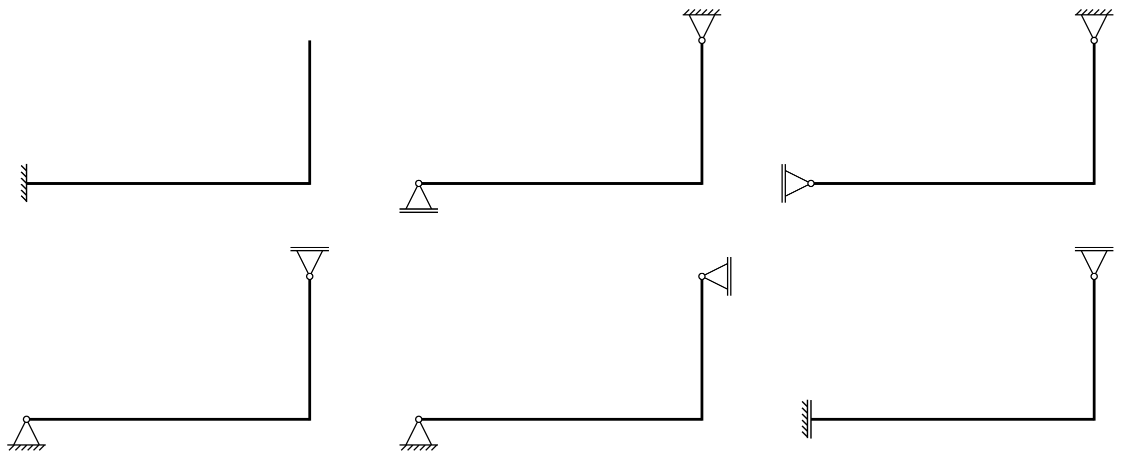
• Knicklast (Euler-Fall II)

$$F_{\mathrm{krit}} = \pi^2\,\frac{E\,I}{L^2} = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{E}{L^2}\left(\frac{a^4}{3} - \pi\,r^4\right)$$

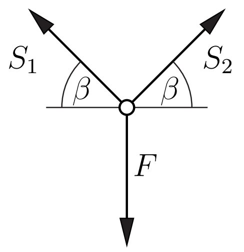
• Dimensionierung

$$\begin{aligned} F &\overset{!}{\leq} F_{\mathrm{krit}} \\ \Leftrightarrow \quad F &\leq \frac{\pi^2}{4}\,\frac{E}{L^2}\left(\frac{a^4}{3} - \pi\,r^4\right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\pi^2}\,\frac{L^2}{E}\,F &\leq \frac{a^4}{3} - \pi\,r^4 \\ \Rightarrow \quad r &\leq +\sqrt[4]{\frac{1}{\pi}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{4}{\pi^2}\,\frac{L^2}{E}\,F\right)} \end{aligned}$$

c) Beispiele für zulässige statisch bestimmte Grundsysteme (weitere möglich):



d) i) • Stabkräfte



$$\nwarrow: \quad S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$\nearrow: \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

• Arbeit der äußeren Last

$$W = \frac{1}{2}\,F\,f$$

• Formänderungsenergie

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_i \frac{S_i^2\,L_i}{EA_i} = \frac{1}{2}\frac{1}{EA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}F\right)^2(L+2L) = \frac{3}{4}\frac{F^2L}{EA}$$

• Verformung

$$W = \Pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,F\,f = \frac{3}{4}\frac{F^2L}{EA} \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{3}{2}\frac{FL}{EA}$$

ii) Der Arbeitssatz darf hier verwendet werden, weil nur eine äußere Last am System angreift und die Verschiebung an der Stelle und in Richtung der äußeren Last gesucht ist .

iii) • Gleiche Stabkraft $S := S_1 = S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}F$ in beiden Stäben

• Spannung

$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F}{A}$$

• Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F}{EA}$$

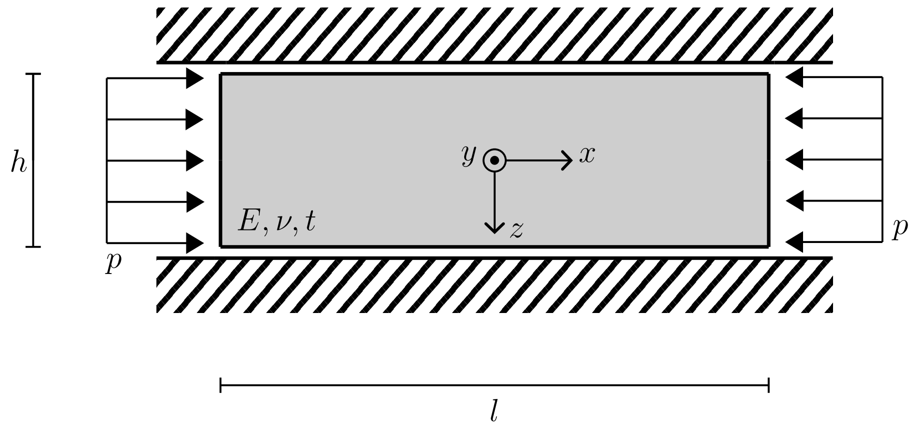
iv) Wenn für beide Stäbe die Gesamtdehnung $\varepsilon_{\text{tot}} = 0$ beträgt, verschiebt sich Knoten A nicht. Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe iii) folgt:

$$\varepsilon_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T\Delta T \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = -\frac{\sigma}{E\,\alpha_T} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F}{EA\,\alpha_T}$$

2. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)

Ein linear-elastischer Block (Höhe h, Länge l, Dicke t, E-Modul E, Querkontraktionszahl ν) wird durch einen konstanten Druck p in x-Richtung belastet. In z-Richtung ist seine Ausdehnung durch starre Wände verhindert auf denen der Block reibungsfrei gleiten kann. In die Dickenrichtung y kann sich der Block frei ausdehnen. Es liegt ein homogener Spannungszustand vor.



Bearbeiten Sie für das vorliegende dreidimensionale Problem folgende Teilaufgaben:

a) Wie groß ist die Spannung σ_x im Block?

b) Welche Konsequenz haben die starren Wände auf die Dehnung ε_z?

c) Wie groß muss der äußere Druck p sein, damit sich die Dicke des Blocks um 1 % vergrößert, also von t auf $1{,}01\,t$?

d) Bestimmen Sie für den Fall aus Teilaufgabe c) die Dehnung in x-Richtung.

e) Bestimmen Sie für den Fall aus Teilaufgabe c) den Betrag der Kraft F_z, welche der Block auf die Wände ausübt.

f) Bestimmen Sie ohne Rechnung, wie groß der Betrag der Kraft F_z ist, wenn sich die Dicke des Blocks um 2 % vergrößert.

Gegeben: l, h, t, E, ν.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) $\sigma_x = -p$

b) $\varepsilon_z = 0$

c)
- Grundgleichungen lineare Elastizität im Raum (isotherm)

$$\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \\ E\varepsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

- $\varepsilon_y = \frac{\Delta t}{t} = \frac{0.01t}{t} = \frac{1}{100}$, freie Ausdehnung: $\sigma_y = 0$
- Einsetzen in Grundgleichungen

$$E\varepsilon_x = -p - \nu\sigma_z \tag{1}$$

$$E\frac{1}{100} = -\nu(-p + \sigma_z) \tag{2}$$

$$0 = \sigma_z - \nu(-p) \tag{3}$$

- Auflösen

$$(3) \Rightarrow \sigma_z = -\nu p \tag{4}$$

$$\text{Einsetzen in (2)} \Rightarrow \frac{E}{100} = \nu(\nu+1)p \Rightarrow p = \frac{E}{100\nu(\nu+1)} \tag{5}$$

d) Dehnung aus Gleichung (1)

$$E\varepsilon_x = (\nu^2 - 1)p \Rightarrow \varepsilon_x \overset{(5)}{=} \frac{\nu - 1}{\nu}\frac{1}{100}$$

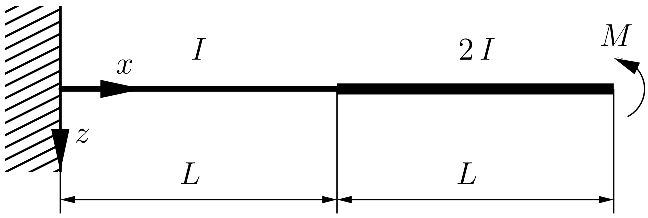
e) Kraft in z-Richtung mithilfe des Betrags der Spannung und Fläche im Ausgangszustand:

$$F_z = |\sigma_z|tl \overset{(4)}{=} \nu ptl \overset{(5)}{=} \frac{Etl}{100(\nu+1)}$$

f) Lineare Elastizität: Doppelte Dehnung $\Rightarrow$ doppelte Kraft

$$F_z = \frac{Etl}{50(\nu+1)}$$

3. Aufgabe: (ca. 17 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Balken (E-Modul E) hat bereichsweise unterschiedliche, konstante Flächenträgheitsmomente (I und $2\,I$) und wird durch ein Einzelmoment M an der Stelle $x = 2\,L$ belastet. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie den Biegemomentenverlauf.

b) Ermitteln Sie auf Basis von Teilaufgabe a) die Funktion $w(x)$ der Biegelinie durch Integration der zugehörigen Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die Durchbiegung an der Stelle $x = L$ mithilfe der Biegelinie aus Teilaufgabe b).

d) Ermitteln Sie die Durchbiegung an der Stelle $x = L$ mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Gegeben: I, E, L, M.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Momentenverlauf

$$M(x) = M = \text{konst.}$$

b) Bereichsweise Integration der DGL der Biegelinie

$$w_1''(x) = -\frac{M}{EI} \qquad w_2''(x) = -\frac{M}{2\,EI}$$

$$w_1'(x) = -\frac{M}{EI}\,x + c_1 \qquad w_2'(x) = -\frac{M}{2\,EI}\,x + c_3$$

$$w_1(x) = -\frac{M}{EI}\,\frac{x^2}{2} + c_1\,x + c_2 \qquad w_2(x) = -\frac{M}{EI}\,\frac{x^2}{4} + c_3\,x + c_4$$

Randbedingungen

$$w_1'(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$
$$w_1(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

Übergangsbedingungen

$$w_1'(x=L) = w_2'(x=L)$$
$$\Rightarrow -\frac{M}{EI}\,L = -\frac{M}{2\,EI}\,L + c_3 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = -\frac{M}{EI}\,\frac{L}{2}$$
$$w_1(x=L) = w_2(x=L)$$
$$\Rightarrow -\frac{M}{EI}\,\frac{L^2}{2} = -\frac{M}{EI}\,\frac{L^2}{4} + c_3\,L + c_4 \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = \frac{M}{EI}\,\frac{L^2}{4}$$

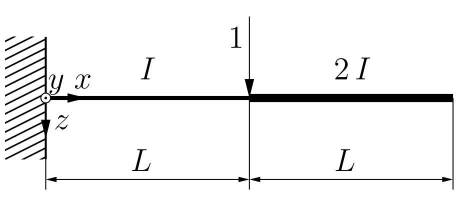
Biegelinien

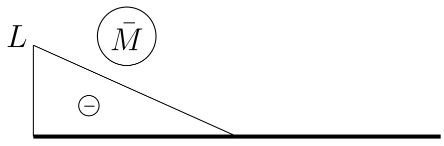
$$w_1(x) = -\frac{M}{EI}\,\frac{x^2}{2}, \quad w_2(x) = -\frac{M}{EI}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{L}{2}\,x - \frac{L^2}{4}\right)$$

c) Durchbiegung an der Stelle $x = L$ mithilfe der Biegelinie

$$w_1(x=L) = w_2(x=L) = -\frac{M}{EI}\,\frac{L^2}{2}$$

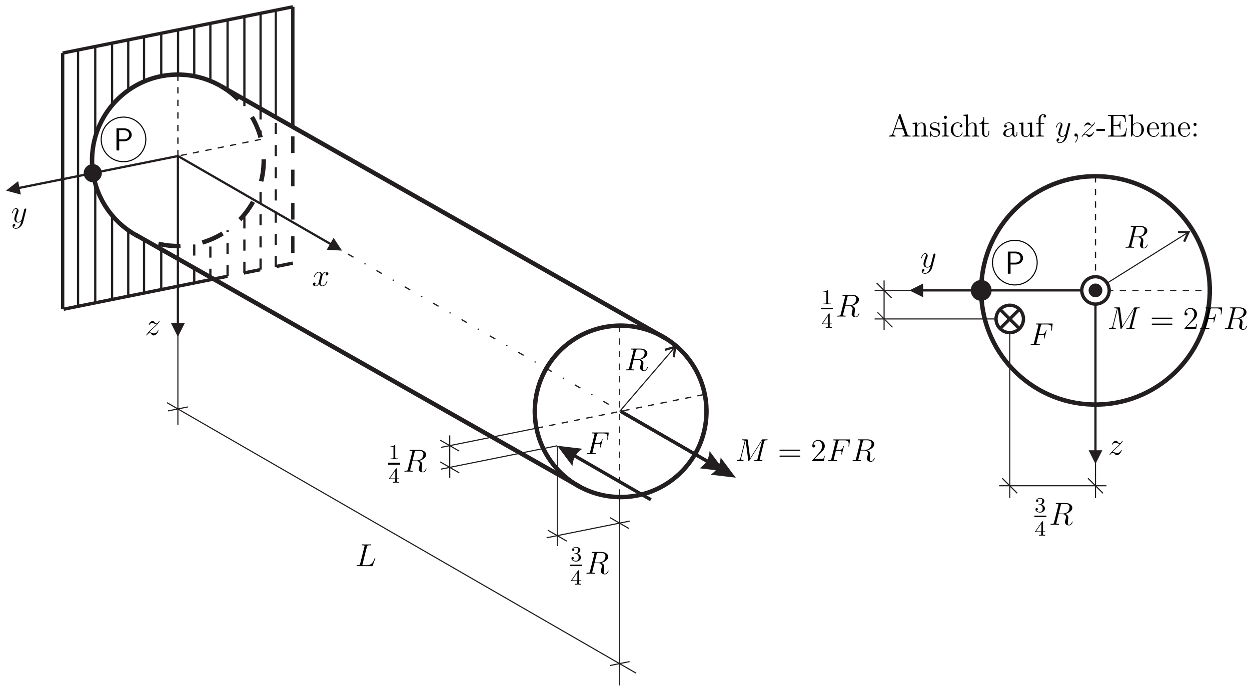
d) Durchbiegung an der Stelle $x = L$ mithilfe des PdvK





$$f = \int_0^L \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_L^{2\,L} \frac{M\,\bar{M}}{2\,EI}\,\mathrm{d}x}_{0} \quad |\,\text{Koppeltafel (oder direkte Integration)}$$
$$= \frac{1}{EI}\,\frac{1}{2}\,M\,(-L)\,L = -\frac{M}{EI}\,\frac{L^2}{2}$$

4. Aufgabe: (ca. 21 % der Gesamtpunkte)



Der abgebildete Balken (Länge L, Schubmodul G) ist an der Stelle $x = 0$ eingespannt. Er verfügt über einen kreisförmigen Vollquerschnitt mit dem Radius R. An der Stelle $(x,\, y,\, z) = (L,\, \frac{3}{4}R,\, \frac{1}{4}R)$ wird der Balken durch eine Kraft F parallel zur x-Achse belastet. Zusätzlich wirkt an der Stelle $(x,\, y,\, z) = (L,\, 0,\, 0)$ ein Moment $M = 2FR$ um die x-Achse.

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie alle auftretenden Schnittgrößen an der Stelle $x = 0$.

b) Bestimmen Sie die Funktion $z = f(y)$ der Spannungsnulllinie an der Stelle $x = 0$ und skizzieren Sie diese.

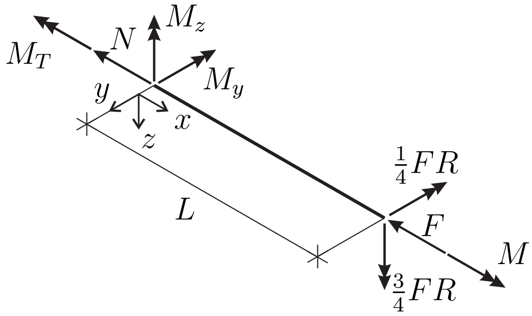
c) Bestimmen Sie die auftretenden Spannungen im Punkt P, der sich an der Stelle $(x,\, y,\, z) = (0,\, R,\, 0)$ befindet. Stellen Sie den Spannungszustand in diesem Punkt anschließend an einem geeigneten infinitesimalen Flächenelement dar.

d) Bestimmen Sie den Verdrehwinkel ϑ an der Stelle $x = \frac{L}{2}$ mithilfe der zugehörigen Differentialgleichung.

Gegeben: L, G, R, F.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Schnittgrößen bei $x = 0$:



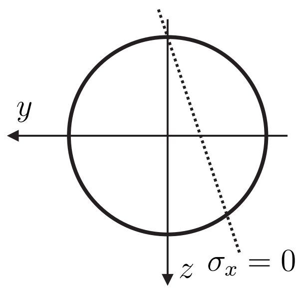
$$N(x=0) = -F$$
$$M_y(x=0) = -\frac{1}{4}\,FR$$
$$M_z(x=0) = \frac{3}{4}\,FR$$
$$M_T(x=0) = M = 2\,FR$$

b) Spannungsnulllinie bei $x = 0$:

$$A = \pi R^2, \qquad I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\sigma_x(y,\,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\,z - \frac{M_z}{I_z}\,y \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow z = -\frac{N}{M_y}\,\frac{I_y}{A} + \frac{M_z}{M_y}\,\frac{I_y}{I_z}\,y$$
$$= -R - 3\,y$$



c) Spannungen im Punkt P:

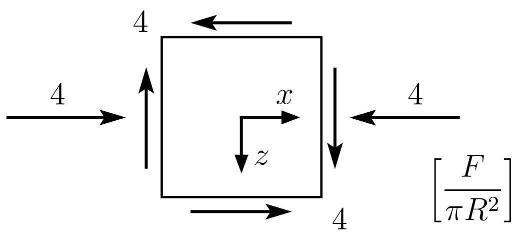
- Normalspannung

$$\sigma_x^{\mathsf{P}} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\,z - \frac{M_z}{I_z}\,y = -\frac{F}{\pi R^2} + 0 - \frac{\frac{3}{4}\,FR}{\frac{\pi R^4}{4}}\,R = -4\,\frac{F}{\pi R^2}$$

- Schubspannung infolge Torsion

$$I_T = \frac{\pi R^4}{2}$$
$$\Rightarrow \tau_T^{\mathsf{P}} = \frac{M_T}{I_T}\,r = \frac{2\,FR}{\frac{\pi\,R^4}{2}}\,R = 4\,\frac{F}{\pi R^2}$$

- Darstellung



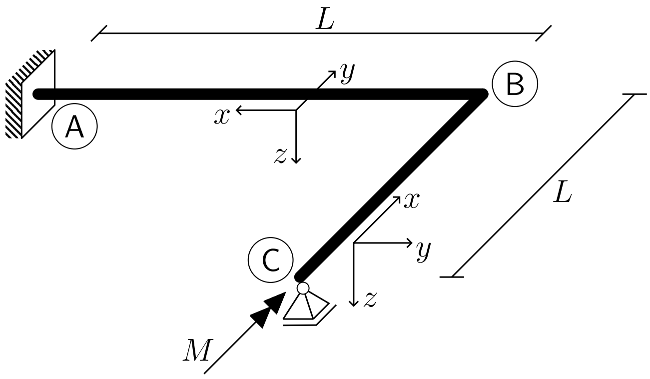
d) Verdrehwinkel bei $x = \frac{L}{2}$:

$$GI_T\,\vartheta'(x) = M_T(x) = M_x = 2\,FR$$
$$\Rightarrow \quad GI_T\,\vartheta(x) = 2\,FR\,x + C_1$$

Randbedingung: $\quad \vartheta(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \vartheta\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{GI_T}\,2\,FR\frac{L}{2} = \frac{2\,F\,L}{G\,\pi\,R^3}$$

5. Aufgabe: (ca. 18 % der Gesamtpunkte)



Der oben dargestellte, statisch unbestimmt gelagerte Balken (Biegesteifigkeit EI_y, Torsionssteifigkeit $GI_T = 3EI_y$) wird im Punkt C durch ein Einzelmoment M um die lokale x-Achse belastet. Einflüsse aus Querkraftschub sollen im gesamten Träger vernachlässigt werden. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben für das räumliche Problem:

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktion des Loslagers am Punkt C mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

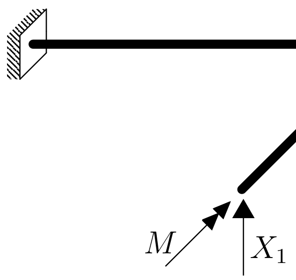
b) Skizzieren Sie die resultierenden Schnittgrößenverläufe unter Angabe der wesentlichen Ordinaten.

Gegeben: L, M, EI_y.

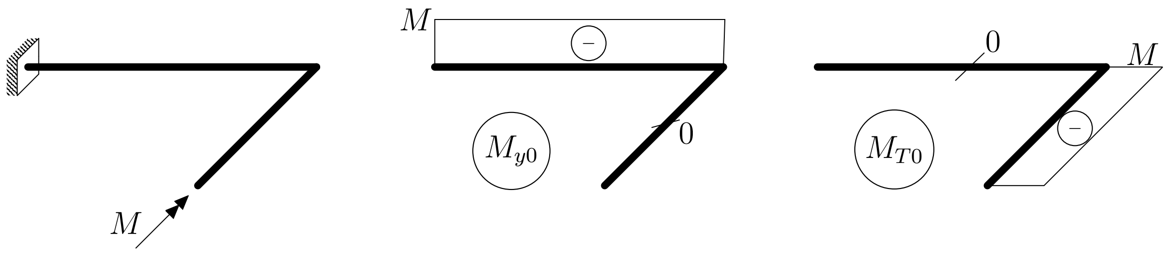
Musterlösung - Aufgabe 5

a) Prinzip der virtuellen Kräfte

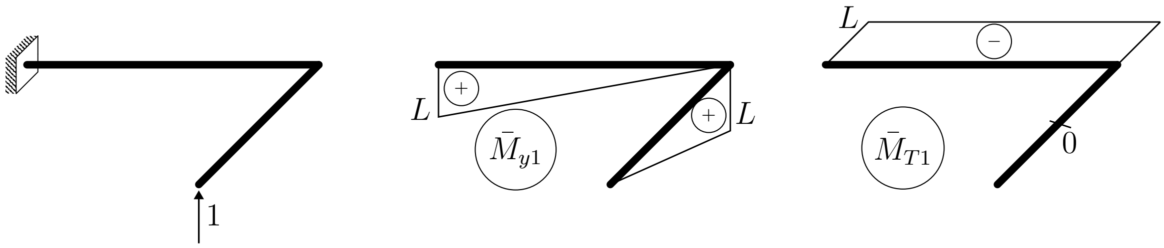
- System ist 1-fach statisch unbestimmt
- Statisch bestimmtes Grundsystem (Lagerreaktion am Loslager wird als unbekannte Kraftgröße $X_1 = C$ festgelegt)



- "0"-Lastfall



- "1"-Lastfall



- Einflusszahlen

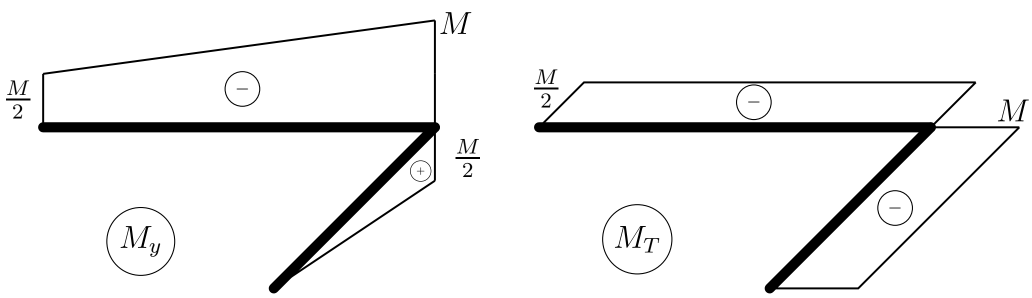
$$
\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \int \frac{\bar{M}_{y1}^2}{EI_y}\mathrm{d}x + \int \frac{\bar{M}_{T1}^2}{GI_T}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI_y}\cdot\frac{1}{3}\cdot L\cdot L\cdot L + \frac{1}{EI_y}\cdot\frac{1}{3}\cdot L\cdot L\cdot L + \frac{1}{GI_T}\cdot(-L)\cdot(-L)\cdot L \\
&= \frac{2L^3}{3EI_y} + \frac{L^3}{GI_T} = \frac{2L^3}{3EI_y} + \frac{L^3}{3EI_y} = \frac{L^3}{EI_y} \\
\alpha_{10} &= \int \frac{M_{y0}\bar{M}_{y1}}{EI_y}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_y}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-M)\cdot L\cdot L = -\frac{ML^2}{2EI_y}
\end{aligned}
$$

- Kompatibilität (Absenkung am Auflager ist Null)

$$\alpha_{10} + \alpha_{11}X_1 = 0 \quad \Leftrightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{M}{2L}(= C)$$

b) Schnittgrößenverlauf durch Superposition

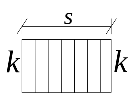
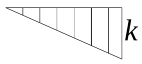
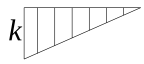
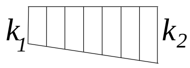
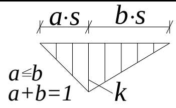
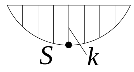
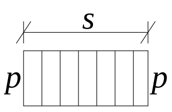
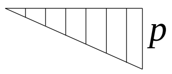
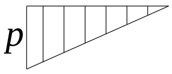
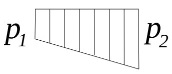
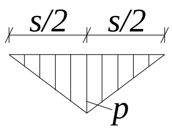
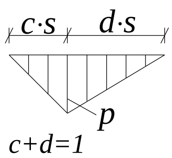
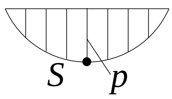
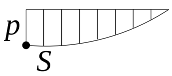
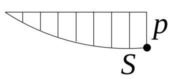
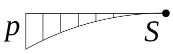
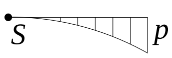
$$M_y = M_{y0} + \bar{M}_{y1}X_1$$
$$M_T = M_{T0} + \bar{M}_{T1}X_1$$



M
M/2
−
+
M/2
M_y
M/2
−
M
−
M_T

Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x) \mathrm{dx}$

$P(x)$ \ $K(x)$						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b) + p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d) + k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \mathrel{\hat{=}}$ Scheitel einer quadratischen Parabel