Prüfung in

Baudynamik

23. Februar 2026

Name: ..... Vorname: .....

Matr.-Nr.: ..... Studiengang: .....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektor					

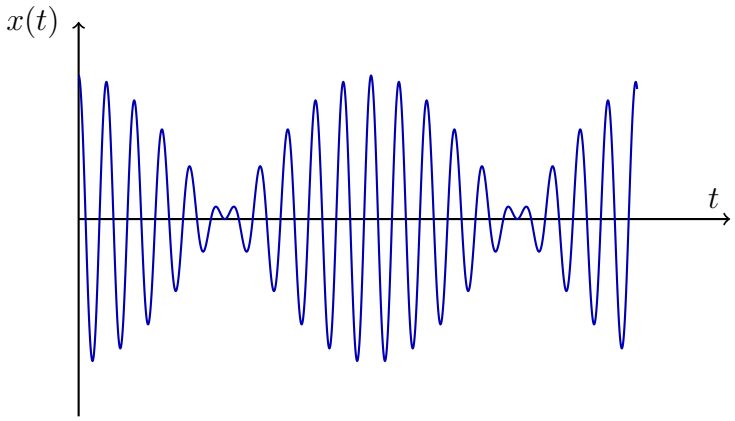
(Eintrag erfolgt durch Institut)

Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Baudynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	23. Februar 2026

1. Aufgabe: (ca. 13 Minuten)

Bearbeiten Sie die folgenden voneinander unabhängigen Aufgaben:

a) Folgende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf einer Schwingung:



Benennen Sie das dargestellte physikalische Phänomen und erläutern Sie wie es zustande kommt.

b) Ein Impulshammer dient dazu, ein Bauwerk oder ein Bauwerksmodell mit einem nahezu Dirac-förmigen Kraftimpuls anzuregen. Erläutern Sie das Ziel dieser Anregung unter Bezugnahme auf die Frequenzspektren des Diracstoßes und der Systemantwort.

c) Betrachten Sie ein lineares, gedämpftes Mehrfreiheitsgradsystem. Formulieren Sie die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Dämpfung *durchdringend* wirkt.

d) Gegeben ist die Bewegungsgleichung eines ebenen zweigeschossigen Stockwerkrahmens mit zwei Freiheitsgraden

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Schätzen Sie die *erste Eigenkreisfrequenz* des Systems mithilfe des Rayleigh-Quotienten ab. Begründen Sie dabei Ihre Wahl eines geeigneten genäherten Eigenvektors.

Gegeben: k, m.

e) Gegeben sei ein Feder-Masse-Dämpfer-System, das der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$ mit gegebener Masse m und Federsteifigkeit k genügt. Die Amplitude der Auslenkung beträgt nach $n = 15$ Schwingungszyklen ein Fünftel des Anfangswertes $x_0 \neq 0$. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante d?

Gegeben: k, m.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Schwebung, Überlagerung zweier Frequenzen mit annähernd gleicher Frequenz

b) Ein kurzer Impuls enthält ein breites (idealerweise konstantes) Frequenzspektrum, wodurch alle Eigenfrequenzen des Systems gleichzeitig angeregt werden.
Ziel ist es, experimentell die Eigenfrequenzen des Bauwerks oder Bauwerkmodells zu bestimmen.

c) notwendige Bedingung: $\det(\boldsymbol{D}) = 0$
hinreichende Bedingung: $\boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ für alle i, wobei $\boldsymbol{v}_i$ die Eigenvektoren des ungedämpften Systems sind

d) Wähle z. B. $\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ als Näherung für den 1. Eigenvektor. Begründung: gleichsinnige Verformung für 1. Eigenform (gleiches VZ), Annahme linearer Verformung des Rahmens.

$$R = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix}0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}m & 2m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}} = \frac{2}{5}\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 \leq \sqrt{\frac{2}{5}\frac{k}{m}}$$

e) geg.: $x_{15} = \frac{1}{15}x_0$
logarithmisches Dekrement

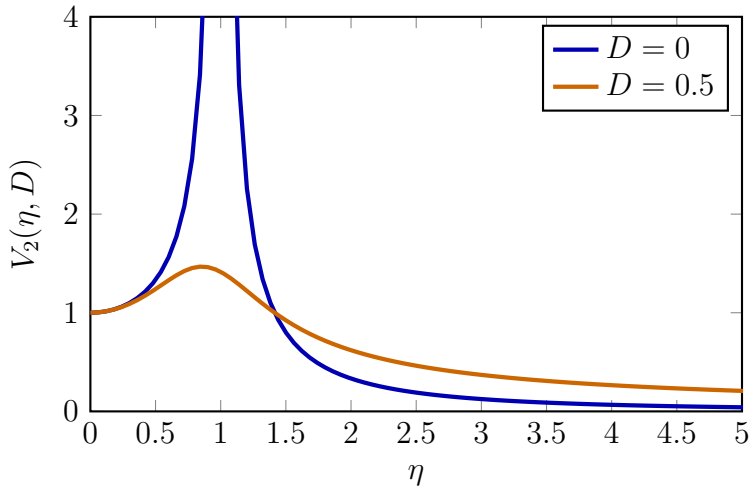
$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{n}\ln(\frac{x_n}{x_{n+1}}) = \frac{1}{15}\ln(\frac{x_0}{x_{15}}) = \frac{1}{15}\ln(5)\\ &= \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1-D^2)\,\delta^2 = (2\pi D)^2 \quad \Leftrightarrow\ D^2(4\pi^2+\delta^2) = \delta^2 \quad \Leftrightarrow\ D = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.0171$$

$$\Rightarrow d = 2m\omega_0 D = 2\sqrt{mk}D = 0.0341\sqrt{mk}$$

2. Aufgabe: (ca. 7 Minuten)

Ein gedämpfter Einmassenschwinger (Dämpfungsgrad D, Eigenkreisfrequenz ω_0) wird durch eine harmonische Fundamenterregung mit der Frequenz Ω angeregt. Gegeben sei der qualitative Verlauf der Vergrößerungsfunktion des Systems $V_2(\eta, D)$ für $D = 0$ und $D = 0.5$.



a) Begründen Sie das Verhalten der Vergrößerungsfunktion $V_2(\eta, 0)$ an den maßgebenden Stellen $\eta = 0$, $\eta = 1$ und $\eta \to \infty$.

b) Es sei $\Omega \approx \omega_0$. Durch konstruktive Maßnahmen kann die Eigenkreisfrequenz ω_0 halbiert oder verdoppelt werden. Begründen Sie mithilfe der obigen Abbildung, für welche Variante Sie sich entscheiden.

c) Begründen Sie, warum Sie im Fall einer *überkritischen Abstimmung* ($\Omega > \omega_0$) die Dämpfung des Systems nicht notwendigerweise erhöhen würden.

d) Bei harmonischer Erregung setzt sich die Lösung der Bewegungsgleichung im Allgemeinen aus einer homogenen und einer partikulären Lösung zusammen. Begründen Sie welche dieser beiden Lösungen aus technischer Sicht von besonderem Interesse ist.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) maßgebende Stellen:

$$\begin{aligned} V_2(0,0) &= 1: && \text{statische Lösung} \\ V_2(1,0) &= \infty: && \text{Resonanz} \\ \lim_{\eta\to\infty} V_2(\eta,0) &= 0: && \text{träge Masse reagiert nicht} \\ & && \text{auf unendlich schnelle Fundamentanregung} \end{aligned}$$

b) Halbierung damit gilt $\eta = \frac{\Omega}{0.5\omega_0} = 2$ da geringere Vergrößerung (als bei Verdopplung $\eta = \frac{\Omega}{2\omega_0} = 0.5$) und weiter entfernt von Resonanzstelle

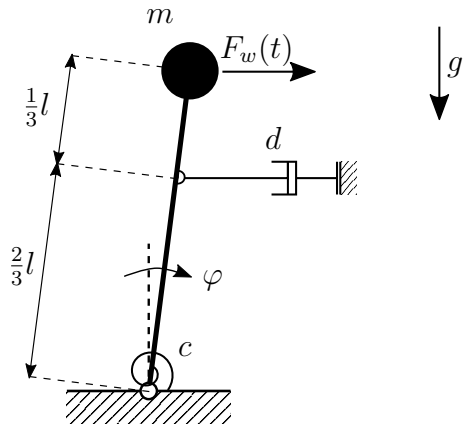
c) Dämpfung verschlechtert die Isolierung bzw. mit zunehmender Dämpfung D wird V größer, bleibt allerdings unter 1).

d) partikuläre Lösung meist wichtiger, da homogene Lösung weggedämpft wird

Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Baudynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	23. Februar 2026

3. Aufgabe: (ca. 20 Minuten)

Das Schwingungsverhalten eines Wasserturms soll mit einem einfachen Ersatzsystem (siehe Abbildung) untersucht werden. Die als Punktmasse idealisierte Kopfmasse m ist dabei mit einem starren, masselosen Stab der Länge l und einer linearen Drehfeder mit Drehfedersteifigkeit c mit dem Boden verbunden. Im Abstand $\frac{2}{3}l$ ist vom unteren Stabende ein Dämpfer mit Dämpfungskonstante d angebracht, der durch konstruktive Maßnahmen immer horizontal bleibt. Es wirkt die Gravitation g. Die Windlast wirkt ebenfalls rein horizontal und wird über eine harmonische Kraft $F_w(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ der Frequenz Ω und Amplitude F_0 simuliert. Die generalisierte Koordinate φ beschreibt den Winkel der Auslenkung gegenüber der Vertikalen.



Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie die nichtlineare Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate φ mit Hilfe der synthetischen Methode (Freischneiden).

Für kleine Auslenkungen sei nun die linearisierte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{4}{9}\frac{d}{m}\dot{\varphi} + \left(\frac{c}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\Omega t)$$

für die Bearbeitung der folgenden Teilaufgaben gegeben.

b) Geben Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0, das Lehrsche Dämpfungsmaß D sowie die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_d des Systems an.

c) Transformieren Sie die Bewegungsgleichung in die Eigenzeit τ, sodass $\tau = \omega_0 t$ gilt.

d) Wie lautet die allgemeine Lösung für $\varphi(t)$, wenn $0 < D < 1$ gilt.

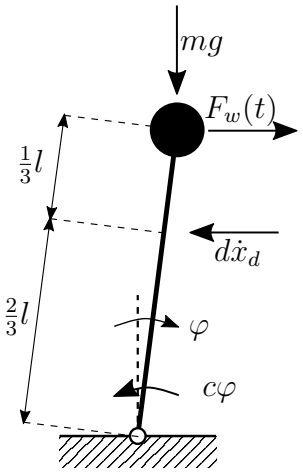
e) Im Monat August kann der Einfluss aus Windlast vernachlässigt werden. Wie lautet nun die allgemeine Lösung $\varphi(t)$? Skizzieren Sie $\varphi(t)$ ohne Rechnung für

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 < 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t=0) = v_0 < 0.$$

Gegeben: $c, l, m, d, F_0, \Omega, g, \varphi_0, v_0$.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Freischnitt:



Kinematik:

$$x_d = \frac{2}{3} l \sin(\varphi)$$
$$\dot{x}_d = \frac{2}{3} l \cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

Drallsatz:

$$\sum M_i = ml^2\ddot{\varphi}$$
$$\Leftrightarrow F_w l\cos(\varphi) - d\dot{x}_d \frac{2}{3} l\cos(\varphi) - c\varphi + mgl\sin(\varphi) = ml^2\ddot{\varphi}$$
$$\Leftrightarrow ml^2\ddot{\varphi} + \frac{4}{9} dl^2 \cos^2(\varphi)\dot{\varphi} + c\varphi - mgl\sin(\varphi) = F_0 l\cos(\varphi)\cos(\Omega t)$$

b) Bewegungsgleichung laut Angabe:

$$\ddot{\varphi} + \frac{4}{9}\frac{d}{m}\dot{\varphi} + \left(\frac{c}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\Omega t)$$

Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{ml^2} - \frac{g}{l}}$$

$$D = \frac{2d}{9\omega_0 m}, \qquad \omega_d = \sqrt{1 - D^2}\omega_0$$

c) Transformation der Bew.-Gl. in Eigenzeit: $\tau = \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}\tau}\omega_0 = (\bullet)'\omega_0$

$$\Rightarrow \quad \omega_0^2\varphi'' + \frac{4}{9}\frac{d}{\omega_0 m}\omega_0^2\varphi' + \omega_0^2\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\eta\tau), \qquad \text{mit: } \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$
$$\Leftrightarrow \quad \varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = \frac{F_0}{ml\omega_0^2}\cos(\eta\tau)$$

d) $\varphi(t) = \varphi_h(t) + \varphi_p(t)$

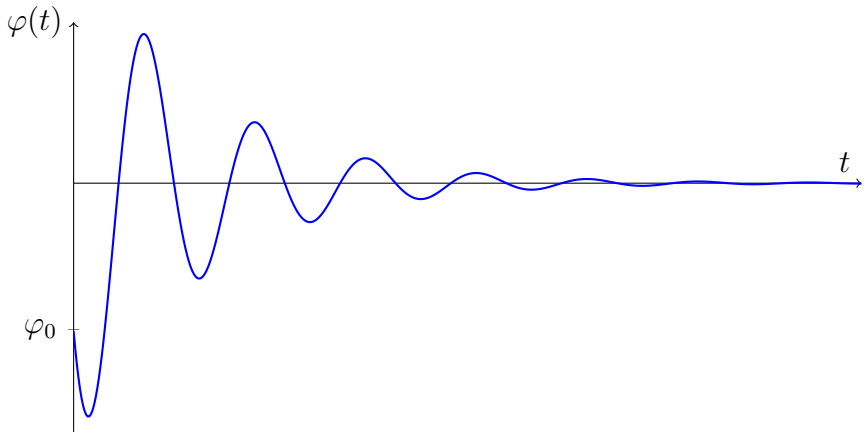
$$\varphi_h(t) = e^{-D\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right)$$
$$\varphi_p(t) = \frac{F_0}{ml\omega_0^2} V\cos(\Omega t - \gamma) \quad \text{mit} \quad \tan\gamma = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

und

$$V = V_3 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}.$$

e) $F_w = 0 \quad \Rightarrow \varphi_p = 0,\ \varphi(t) = \varphi_h(t)$

Skizze:



4. Aufgabe: (ca. 20 Minuten)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem eines ungedämpften, fremderregten Systems mit 2 Freiheitsgraden q_1 und q_2:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} + \begin{bmatrix} 8k & 2k \\ 2k & 5k \end{bmatrix} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \cos(\Omega t), \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

a) Nennen Sie das Ziel und den damit verbundenen Vorteil der Modalanalyse.

b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren des Systems.

d) Führen Sie mithilfe der Ergebnisse aus c) eine Modalanalyse durch.

Im folgenden sei nun $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Desweiteren sind die Anfangswerte

$$\boldsymbol{q}(t=0) = \boldsymbol{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(t=0) = \dot{\boldsymbol{q}}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben.

e) Bestimmen Sie die *modale* Lösung $\boldsymbol{x}$ des nun frei schwingenden Systems.

Gegeben: m, k, F_1, F_2, Ω, $\boldsymbol{q}_0$, $\dot{\boldsymbol{q}}_0$.

Hinweis: Nutzen Sie für die Normierung der Eigenvektoren $m_0 = m$ *und* $l_0 = 1$.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Fragen zur Modalanalyse:

- Ziel: Entkopplung der Freiheitsgrade des Systems.
- Vorteil: Lösungsansätze für Systeme mit einem Freiheitsgrad anwendbar.

b) Eigenwerte:

$$\det(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}) = (8k-\omega^2 m)(5k-\omega^2 m) - 4k^2 = m^2(\omega^2)^2 - 13mk\omega^2 + 36k^2$$

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{13mk \pm \sqrt{169m^2k^2 - 4m^2\cdot 36k^2}}{2m^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = 4{}^{k}/_{m},\ \omega_2^2 = 9{}^{k}/_{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2\sqrt{{}^{k}/_{m}},\ \omega_2 = 3\sqrt{{}^{k}/_{m}}$$

c) Eigenvektoren:

$$\kappa_1 = -\frac{-m\omega_2^2 + 8k}{2k} = -2 \ \Rightarrow\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_2 = -\frac{-m\omega_1^2 + 8k}{2k} = {}^{1}/_{2} \ \Rightarrow\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ {}^{1}/_{2} \end{bmatrix} \text{ bzw. } \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Modalanalyse:

- Normierung der Eigenvektoren:

$$||\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_1||^2 = ||\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_2||^2 = 5 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\Phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- normierte Modalmatrix:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- entkoppeltes System:

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{5}m}\begin{bmatrix} F_1 - 2F_2 \\ 2F_1 + F_2 \end{bmatrix}\cos(\Omega t)$$

e) homogene Lösung:

$$x_{\mathrm{h},i}(t) = A_i\cos(\omega_i t) + B_i\sin(\omega_i t) \text{ für } i = 1,2$$
$$\dot{x}_{\mathrm{h},i}(t) = -A_i\omega_i\sin(\omega_i t) + B_i\omega_i\cos(\omega_i t)$$

- modale Anfangswerte:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{0}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_0 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

- Bestimmung von A_i und B_i:

$$x_i(t=0) = 0 \;\Rightarrow\; A_i = 0$$
$$\dot{x}_i(t=0) = B_i\omega_i \;\Rightarrow\; B_1 = 0,\; B_2 = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{k/m}}$$

- spezielle Lösung:

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{k/m}} \sin(3\sqrt{\frac{k}{m}}t) \end{bmatrix}$$