Modulprüfung

Dynamik

19. März 2026

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr.: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
Korrektor						

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 10 % der Gesamtpunkte)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) In welchem Bereich liegt das Lehr'sche Dämpfungsmaß D eines schwach gedämpften Feder-Masse-Schwingers?

b) Zur Beschreibung eines diskreten mechanischen Systems werden oftmals generalisierte Koordinaten q_i verwendet. Wie lassen sich die zugehörigen generalisierten Kräfte Q_i berechnen, wenn es sich um ein konservatives System handelt?

c) Bitte kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an:

- ☐ Zwangskräfte wirken unabhängig von den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.
- ☐ Zwangskräfte wirken tangential zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.
- ☐ Zwangskräfte wirken senkrecht zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

d) Bitte kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an:

- ☐ Der Arbeitssatz ist ein eigenständiges Postulat.
- ☐ Der Arbeitssatz ist aus dem 2. Newtonschen Axiom ableitbar.
- ☐ Der Arbeitssatz ist ein Sonderfall des Energieerhaltungssatzes.

e) Der Drallsatz für einen starren Körper lautet im Fall ebener Bewegung $\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A$.
Um welche Größen handelt es sich bei $\boldsymbol{M}_A$ und $\boldsymbol{L}_A$?
Gilt der Drallsatz für beliebige Bezugspunkte oder gibt es hier Einschränkungen? Falls ja, welche?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) schwache Dämpfung $0 < D < 1$

b) Berechnung direkt aus dem Potential: $\quad Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$

c) Bitte kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an:

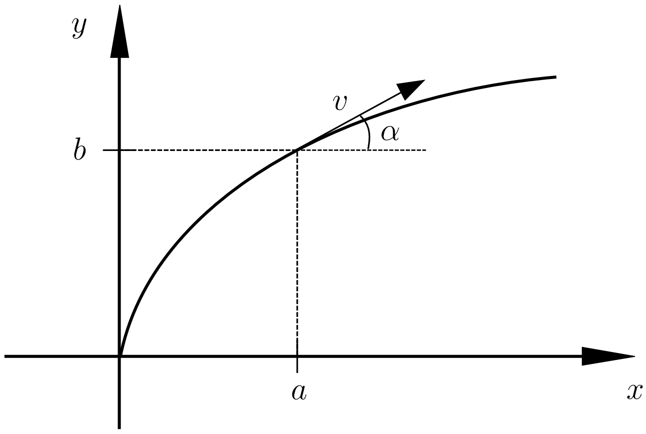
- ☐ Zwangskräfte wirken unabhängig von den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.
- ☐ Zwangskräfte wirken tangential zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.
- ☒ Zwangskräfte wirken senkrecht zu den freien Bewegungsrichtungen eines mechanischen Systems.

d) Bitte kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an:

- ☐ Der Arbeitssatz ist ein eigenständiges Postulat.
- ☒ Der Arbeitssatz ist aus dem 2. Newtonschen Axiom ableitbar.
- ☐ Der Arbeitssatz ist ein Sonderfall des Energieerhaltungssatzes.

e) äußeres Moment $\boldsymbol{M}_A$ und Drehimpuls $\boldsymbol{L}_A$
Einschränkungen für diese einfache Form des Drallsatzes: gilt nur für Punkt $A =$ raumfest oder $A = S$ Massenmittelpunkt (Schwerpunkt)

2. Aufgabe: (ca. 20% der Gesamtpunkte)



Ein Fahrzeug durchfährt die oben abgebildete Rechtskurve der Form

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a} x}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ruht das Fahrzeug im Koordinatenursprung. Anschließend beschleunigt es in x-Richtung gemäß

$$a_x(t) = c\, t^2 \qquad \text{mit} \quad c = \text{konstant.}$$

Es soll der Zeitraum $t \in [0, T]$ betrachtet werden, bis zu welchem das Fahrzeug den Punkt $P(a, b)$ erreicht.

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Ermitteln Sie die Funktion $x(t)$ in Abhängigkeit der gegebenen Anfangsbedingungen.

b) Ermitteln Sie die Konstante c, sodass der Punkt $P(a, b)$ in $T = 4\,\text{s}$ erreicht wird.

c) Ermitteln Sie die Geschwindigkeitskomponente $\dot{y}(t)$.

d) Wie schnell fährt das Fahrzeug durch den Punkt $P(a, b)$?

e) Ermitteln Sie den Winkel α der Bahngeschwindigkeit zur Horizontalen im Punkt $P(a, b)$.

Gegeben: $a = 16\,\text{m}$, $b = 32\,\text{m}$.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Weg-Zeit-Verlauf $x(t)$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= c\,t^2 \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{3}c\,t^3 + C_1 & \dot{x}(t=0) &= 0 & &\Rightarrow C_1 = 0 \\ x(t) &= \frac{1}{12}c\,t^4 + C_2 & x(t=0) &= 0 & &\Rightarrow C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \frac{1}{12}c\,t^4}}$$

b) Konstante c für $T = 4s$

$$x(T) = a = \frac{1}{12}cT^4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \underline{\underline{c = 12\frac{a}{T^4} = \frac{3}{4}\frac{m}{s^4}}}$$

woraus folgt: $x(t) = \frac{1}{16}\frac{m}{s^4}t^4$

c) Geschwindigkeitsverlauf $\dot{y}(t)$

Variante 1

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{\frac{b^2}{a}x(t)} = \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1}{16}\frac{m}{s^4}t^4} = 2\frac{m}{s^2}t^2 \\ \underline{\underline{\dot{y}(t)}} &= \underline{\underline{4\frac{m}{s^2}t}} \end{aligned}$$

Variante 2

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{x(t)}}\dot{x}(t) \\ \underline{\underline{\dot{y}(t)}} &= \underline{\underline{4\frac{m}{s^2}t}} \end{aligned}$$

d) Geschwindigkeit in Punkt $P(a,b)$

Gesamtgeschwindigkeit $v(t)$

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{\frac{1}{16}\frac{m^2}{s^8}t^6 + 16\frac{m^2}{s^4}t^2}$$

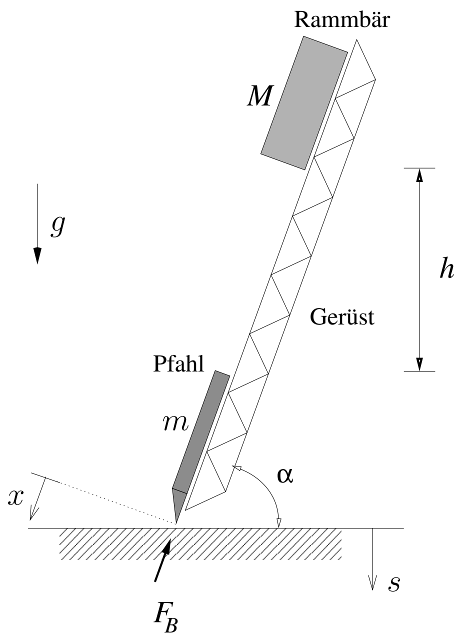
Geschwindigkeit in $P(a,b)$

$$\underline{\underline{v(T)}} = \sqrt{\frac{1}{16}\frac{m^2}{s^8}(4s)^6 + 16\frac{m^2}{s^4}(4s)^2} = 16\sqrt{2}\frac{m}{s} = \underline{\underline{22.63\frac{m}{s}}}$$

e) Winkel α an $P(a,b)$: Geschwindigkeitsvektor tangential zur Bahnkurve

$$\tan(\alpha) = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} = \left.\frac{b}{\sqrt{a}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=a} = \frac{b}{2a} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\underline{\alpha = \arctan(1) = 45°}}$$

3. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)



Mit einem Rammbär (Masse M) wird ein Pfahl (Masse m) unter einem Winkel α in den Boden gerammt. Hierbei wird der Bär aus der Höhe h losgelassen. Der anschließende Stoß erfolgt mit der Stoßzahl e, wobei für die nachfolgende Bewegung angenommen werden kann, dass keine weiteren Stöße erfolgen.
Beim Eindringen in den Boden wirkt dem Pfahl eine Kraft F_B entgegen, die proportional zur Eindringtiefe s ist:

$$F_B = c \cdot s$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Rammbärs unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit dem Pfahl.

b) Geben Sie die Geschwindigkeiten des Bärs und des Pfahls nach dem Stoß an.

c) Wie groß ist der schräge Eindringweg x?

Gegeben: h, m, $M = 3m$, $\alpha = 60°$, $e = 0.2$, $c = 250\dfrac{m\,g}{h}$

<u>Hinweis:</u> Der Bär und der Pfahl bewegen sich auf dem Gerüst reibungsfrei.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} V_0 + \underbrace{T_0}_{=0} &= \underbrace{V_1}_{=0} + T_1 \\ Mgh &= \frac{1}{2}Mv_1^2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{v_1 = \sqrt{2gh}}} \end{aligned}$$

b) Impulserhaltung:

$$Mv_1 + m\underbrace{v_2}_{=0} = M\overline{v}_1 + m\overline{v}_2 \tag{1}$$

Stoßgesetz:

$$e = -\frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{\underbrace{v_2}_{=0} - v_1} \quad \Rightarrow \overline{v}_2 = ev_1 + \overline{v}_1$$

Setze $\overline{v}_2$ in (1) ein:

$$\begin{aligned} Mv_1 &= M\overline{v}_1 + m(ev_1 + \overline{v}_1) \\ \Rightarrow \overline{v}_1 &= \frac{v_1(M - em)}{M + m} = 0.7v_1 \\ \Rightarrow \overline{v}_2 &= ev_1 + \frac{v_1(M - em)}{M + m} = 0.9v_1 \end{aligned}$$

c) Arbeitssatz:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}T \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{F}^{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{pot}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}T \\ \Rightarrow &\underbrace{\int_0^x -F^{\mathrm{B}}(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x}}_{W_{12}^{\mathrm{B}}} + \underbrace{\int_0^s mg\,\mathrm{d}\overline{s}}_{W_{12}^{\mathrm{pot}} = -\Delta V = -(V(s) - V(s=0))} = \Delta T = \underbrace{T(s)}_{=0} - T(s=0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bzw. Energiebilanz:} \quad & T_1 + V_1 + W_{12}^{\mathrm{B}} = T_2 + V_2 \\ \text{mit} \quad & T_1 = T(s=0) = \frac{1}{2}\,m\,\overline{v}_2^2, \quad T_2 = T(s) = 0, \\ & V_1 = V(s=0) = 0, \quad V_2 = V(s) = -m\,g\,s \end{aligned}$$

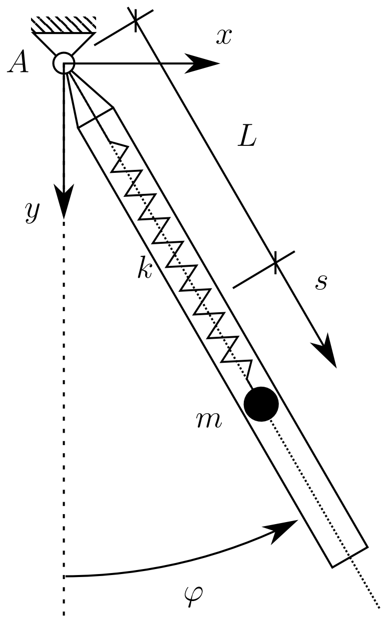
mit Kinematik

$$\sin\alpha = \frac{s}{x} \quad \Leftrightarrow s = \sin\alpha\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x$$

ergibt

$$\begin{aligned} &-\frac{c}{2}x^2\underbrace{\sin\alpha}_{\sqrt{3}/2} + mg\underbrace{\sin\alpha}_{\sqrt{3}/2}x + \frac{1}{2}m\overline{v}_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &x^2 - \frac{2mg}{c}x - \frac{2m}{\sqrt{3}c}\overline{v}_2^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &x_{1/2} = \frac{mg}{c} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{c^2} + \frac{2m}{\sqrt{3}c}0.81 \cdot 2gh} \\ \Leftrightarrow &x_{1/2} = \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{810}{\sqrt{3}}}\right)\frac{h}{250} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{nur positive Lösung sinnvoll}} \quad x_1 \approx 0.0906h \end{aligned}$$

4. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)



In der oben dargestellten Vorrichtung wird eine Kugel (Punktmasse m) an einer Feder (Federsteifigkeit k) in einem masselosen Rohr geführt. Die Feder hat im entspannten Zustand die Länge L. Das Rohr ist im Punkt A aufgehängt und kann sich in der Zeichenebene um den Winkel φ frei bewegen. Die Koordinate s gibt die Bewegung der Masse m im Rohr bezogen auf die entspannte Länge L an.

a) Stellen Sie mit Hilfe der *Lagrangeschen Methode* die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Verwenden Sie hierzu die Koordinaten φ und s.

Im Folgenden sollen kleine Auslenkungen ($\varphi, \dot{\varphi} \ll 1$, $s \ll 1$) betrachtet werden.

b) Wie lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen für s und φ?

Gegeben: m, k, L, g.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Bewegungsgleichungen des Systems in φ und s:

a) Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L+s)\,\sin\varphi \\ (L+s)\,\cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}\sin\varphi + (L+s)\cos(\varphi)\,\dot{\varphi} \\ \dot{s}\cos\varphi - (L+s)\sin(\varphi)\,\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot{s}^2 + ((L+s)\dot{\varphi})^2$$

b) Energien:

i) Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m\left(((L+s)\,\dot{\varphi})^2 + \dot{s}^2\right)$$

ii) Potentielle Energie

$$\begin{aligned} V = -mg\,(L+s)\,\cos(\varphi) &\quad \text{(Lage)} \\ +\frac{k\,s^2}{2} &\quad \text{(Feder)} \end{aligned}$$

c) Lagrange-Anteile:

i) s-Koordinate

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right] = m\ddot{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = m(L+s)\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -mg\,\cos\varphi + ks$$

$$\text{in} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right] - \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{m\ddot{s} - m\,(L+s)\,\dot{\varphi}^2 - mg\,\cos\varphi + ks = 0}$$

ii) φ-Koordinate

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\,(L+s)^2\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right] = m\,(L+s)^2\,\ddot{\varphi} + 2m\,(L+s)\,\dot{s}\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mg\,(L+s)\sin\varphi$$

$$\text{in} \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{m\,(L+s)^2\,\ddot{\varphi} + 2m\,(L+s)\,\dot{s}\,\dot{\varphi} + mg\,(L+s)\sin\varphi = 0}$$

d) Gesamt:

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{k}{m}\,s - (L+s)\,\dot{\varphi}^2 - g\,\cos\varphi = 0}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{L+s}\,\sin\varphi + \frac{2}{L+s}\dot{s}\,\dot{\varphi} = 0}$$

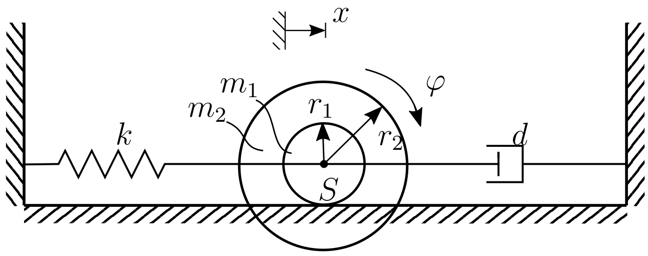
b) linearisierte Bewegungsgleichung für s:

$$\ddot{s} + \frac{k}{m}s = g$$

linearisierte Bewegungsgleichung für φ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0$$

5. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Eine kreiszylindrische Walze (Masse m_2, Radius r_2) ist fest mit einem kreiszylindrischen Zapfen (Masse m_1, Radius r_1) verbunden. Der gesamte Körper rollt mit dem Zapfen auf einer horizontalen Führung ohne zu gleiten. In seinem Schwerpunkt sind eine Feder (Federsteifigkeit k) und ein Dämpfer (Dämpfungskonstante d) befestigt. Die Bewegung wird durch die Koordinate x und den Winkel φ beschrieben. Für $x = 0$ sei $\varphi = 0$ und die Feder entspannt.

a) Schneiden Sie das System in allgemeiner Lage frei und geben Sie φ in Abhängigkeit von x an.

b) Stellen Sie mit Hilfe der *synthetischen Methode* (Freischneiden) die Bewegungsgleichung in x auf.

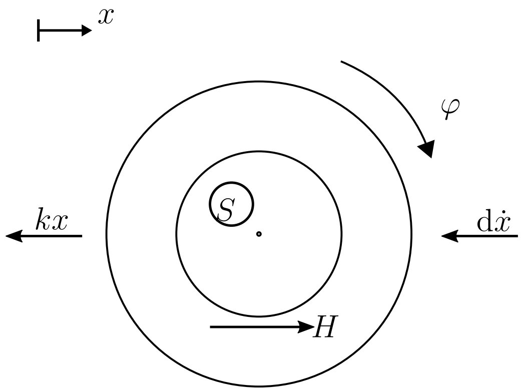
c) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des Systems.

Gegeben: m_1, m_2, r_1, r_2, k, d

Hinweis: Lösungen mit anderen Methoden als der synthetischen werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 5

a) Freischnitt:



Kinematik:
$\dot{x} = r_1 \dot{\varphi}$

$\Rightarrow \quad x = r_1 \varphi$

b) Bewegungsgleichung:

$$\Sigma F_{ix} = (m_1 + m_2)\,\ddot{x} : \qquad -\,k\,x - d\,\dot{x} + H = (m_1 + m_2)\,\ddot{x}$$

$$\Sigma M_i^S = \theta^S \ddot{\varphi} : \qquad -\,H r_1 = \theta^S \frac{\ddot{x}}{r_1} \qquad \text{mit} \quad \theta^S = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{d\,r_1^2}{\theta^M}}_{=2\,\delta} \dot{x} + \underbrace{\frac{k\,r_1^2}{\theta^M}}_{=\omega_0^2} x = 0 \qquad \text{mit} \quad \theta^M = \frac{3}{2}\, m_1\, r_1^2 + m_2 \left(\frac{1}{2}\, r_2^2 + r_1^2\right)$$

c) Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_0^2 = \frac{k\,r_1^2}{\theta^M} \qquad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d\,r_1}{2\sqrt{k\,\theta^M}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} = r_1 \sqrt{\frac{k}{\theta^M} - \frac{d^2\,r_1^2}{4\,(\theta^M)^2}}$$