

Modulprüfung

Festigkeitslehre

20. März 2026

Name: Vorname:

Matr.-Nr.: Studiengang:

Hinweise:

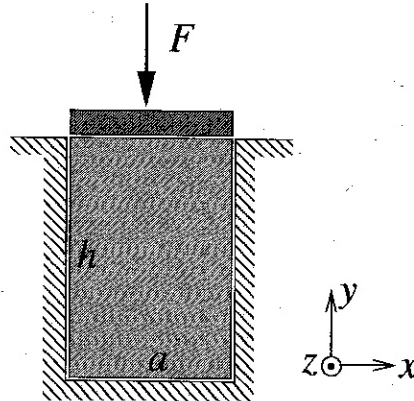
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

Ein Stahlquader mit quadratischer Grundfläche $a \times a$ und Höhe h passt im unbelasteten Zustand genau in einen Hohlraum mit starren Wänden.



Berechnen Sie die Änderung Δh der Höhe des linear thermo-elastischen Quaders, wenn dieser

- a) nur durch eine Kraft F belastet wird (s. Skizze), oder
- b) nur gleichförmig um die Temperatur ΔT erwärmt wird.

Es kann angenommen werden, dass die Kraft F gleichförmig über die Quaderoberseite verteilt wirkt und die Seitenflächen reibungsfrei gleiten können.

Gegeben: $F = 160 \text{ kN}$, $\Delta T = 100^\circ\text{C}$, $E = 210 \text{ kN/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $\alpha_T = 1.2 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$,
 $a = 40 \text{ mm}$, $h = 60 \text{ mm}$.

1. Aufgabe Lösung:

- a) • Grundgleichungen lineare Elastostat im Raum

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T \Delta T \quad (1)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha_T \Delta T \quad (2)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_T \Delta T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

- Hier gilt:

$$\sigma_y = -\frac{F}{a^2}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_z = 0 \quad (\text{starre Wände})$$

$$\sigma_x = \sigma_z \quad (\text{Symmetrie})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{reibungsfreies Gleiten})$$

$$\Delta T = 0$$

- Einsetzen in (1) und (2):

$$0 = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_x + \nu\frac{F}{a^2}] \quad (3)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [-\frac{F}{a^2} - 2\nu\sigma_x] \quad (4)$$

- Auflösen nach ϵ_y :

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \cdot (3) + (4): \epsilon_y = -\frac{1}{E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) \frac{F}{a^2} \approx -3,5374 \cdot 10^{-4}$$

- Höhenänderung

$$\Delta h = \epsilon_y \cdot h \approx -0,0212 \text{ mm}$$

b) • Hier gilt abweichend zu a):
 $\sigma_y = 0, \Delta T \neq 0$

• Einsetzen in (1) und (2):

$$0 = \frac{1}{E} (1-\nu) \sigma_x + \alpha_T \Delta T \quad (5)$$

$$\epsilon_y = -\frac{1}{E} 2\nu \sigma_x + \alpha_T \Delta T \quad (6)$$

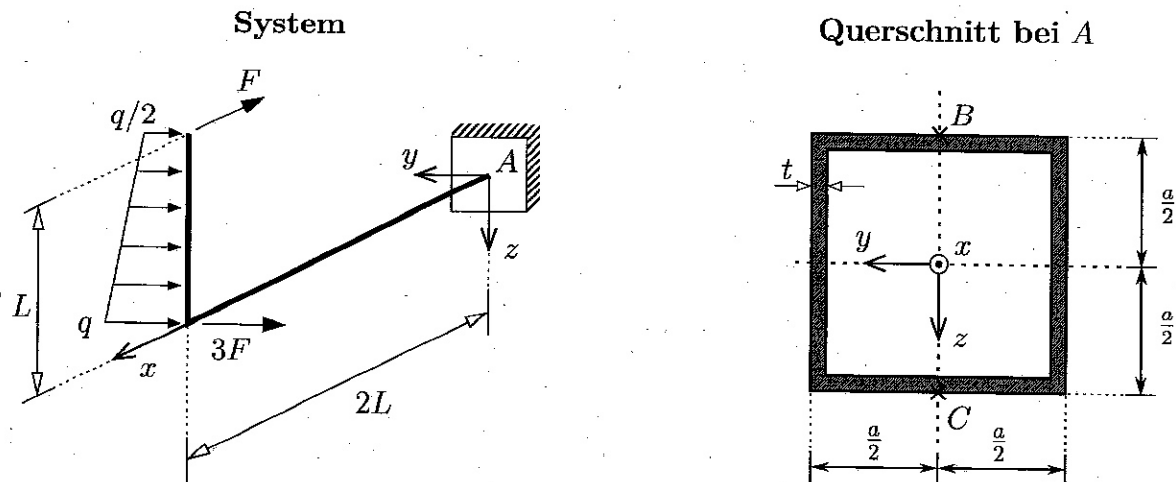
• Auflösen nach ϵ_y :

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \cdot (5) + (6): \epsilon_y = \left(1 + \frac{2\nu}{1-\nu}\right) \alpha_T \Delta T \approx 0,0022$$

• Höhenänderung:

$$\Delta h = \epsilon_y \cdot h \approx 0,1337 \text{ mm}$$

2. Aufgabe: (ca. 25% der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Kragarm ist in A eingespannt und wird durch eine Streckenlast q und eine Einzellast $3F$ in negativer y -Richtung sowie eine Einzellast F in negativer x -Richtung belastet.

- Bestimmen Sie die Schnittgrößen an der Einspannstelle A.
- Bestimmen Sie die Schubspannungen an der Einspannstelle in den Punkten B und C.

Hinweis: Der Querschnitt darf als dünnwandig betrachtet werden ($t \ll a$).

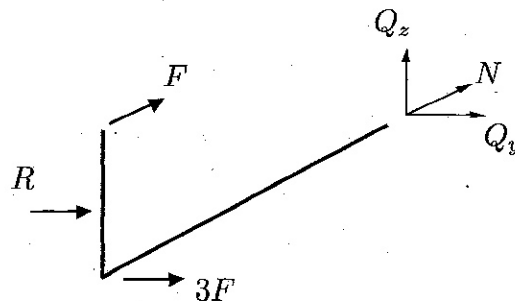
Gegeben: $L = 2.7 \text{ m}$, $a = 100 \text{ mm}$, $t = 5 \text{ mm}$, $q = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $F = 400 \text{ N}$.

2. Aufgabe Lösung:

a) Schnittgrößen an der Einspannstelle A:

$$R = \frac{3}{4} qL = \frac{3}{4} 100 \cdot 2,7 \frac{N}{m} = 202,5 \text{ N}$$

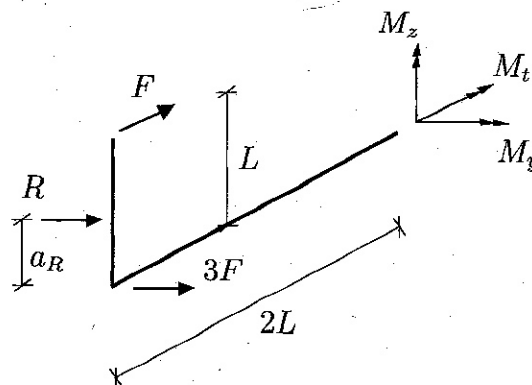
$$a_R = \frac{\frac{1}{2} \frac{L}{2} + \frac{1}{4} \frac{L}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \frac{4}{3} L = \frac{4}{9} L = 1,2 \text{ m}$$



$$\sum F_x = 0: \quad N = -F = -400 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0: \quad Q_y = -R - 3F = -1402,5 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0: \quad Q_z = 0$$

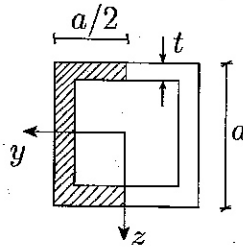


$$\sum M_x^A = 0: \quad M_t = -R a_R = -243 \text{ Nm}$$

$$\sum M_y^A = 0: \quad M_y = F L = 1080 \text{ Nm}$$

$$\sum M_z^A = 0: \quad M_z = -(R + 3F) 2L = -7573,5 \text{ Nm}$$

b) Schubspannung infolge Querkraft:



$$\tau_Q = \frac{Q_y \cdot S_z}{I_z \cdot b(y)} = -\frac{1402,5 \cdot 33875}{2865833 \cdot 10} \frac{Nmm^3}{mm^5} \approx -1,66 \frac{N}{mm^2}$$

$$S_z = A^{\text{außen}} y_S^{\text{au}} - A^{\text{innen}} y_S^{\text{in}} = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - (a-2t) \cdot \frac{a-2t}{2} \cdot \frac{a-2t}{2}$$

$$= \frac{1}{8} (100^3 - 90^3) mm^3 = 33875 mm^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} (a \cdot a^3 - (a-2t)(a-2t)^3) = \frac{1}{12} (100^4 - 90^4) mm^4$$

$$= \frac{1}{12} (100^4 - 90^4) mm^4 \approx 2865833 mm^4$$

$$b(y) = 2t = 10 mm$$

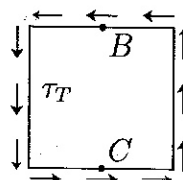
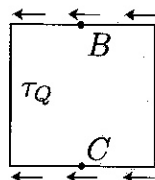
Schubspannung infolge Torsion: dünnwandig $\rightarrow$ 1. Bredt'sche Formel

$$\tau_T = \frac{M_T}{2A_m \cdot t_{\min}} = -\frac{243000}{2 \cdot 9025 \cdot 5} \frac{Nmm}{mm^3} \approx -2,69 \frac{N}{mm^2}$$

$$A_m = \left(a - \frac{2t}{2}\right)^2 = 95^2 mm^2 = 9025 mm^2$$

$$t_{\min} = 5 mm$$

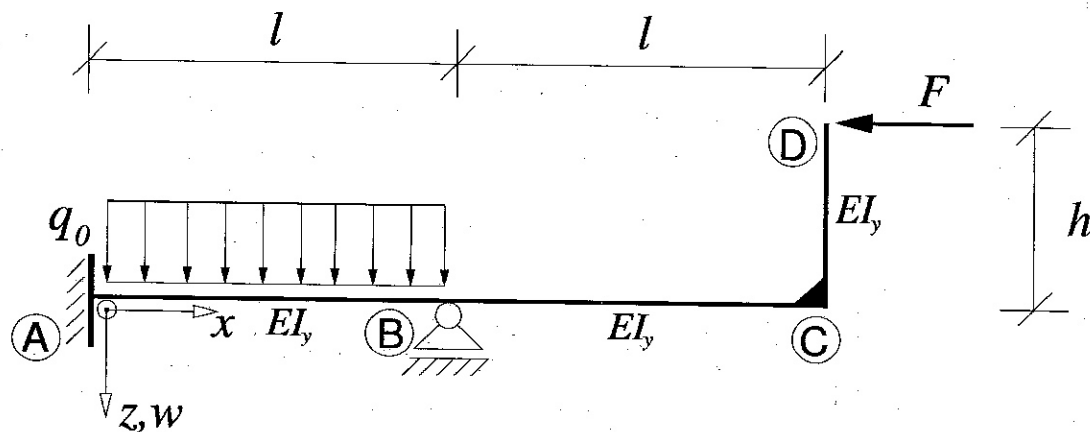
Superposition:



$$\tau_B = \tau_Q + \tau_T = (-1,66 - 2,69) \frac{N}{mm^2} = -4,35 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_C = \tau_Q - \tau_T = (-1,66 + 2,69) \frac{N}{mm^2} = 1,03 \frac{N}{mm^2}$$

3. Aufgabe: (ca. 30% der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das oben dargestellte System unter der angegebenen Belastung.

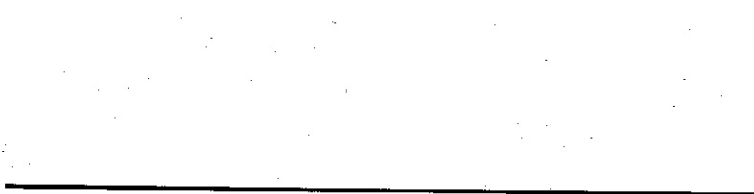
- Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ des Trägers für den Bereich A – B – C mit Hilfe der Balkendifferentialgleichung.
- Skizzieren Sie qualitativ die Momenten- und die Biegelinie für den gesamten Träger (A – B – C – D).

Gegeben: q_0 , $F = q_0 l$, l , $h = l/2$, EI_y

(M)



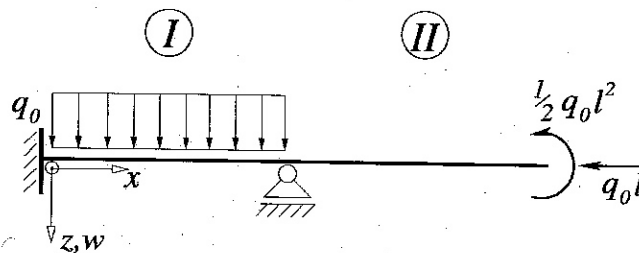
(w)



3. Aufgabe Lösung:

a) Biegelinie $w(x)$ für den Bereich $A - B - C$:

statisch unbestimmtes System



Bereich I

$$\begin{aligned} EIw_I^{(4)} &= q_0 \\ EIw_I''' &= q_0x + C_1 \\ EIw_I'' &= \frac{1}{2}q_0x^2 + C_1x + C_2 \\ EIw_I' &= \frac{1}{6}q_0x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \\ EIw_I &= \frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 \end{aligned}$$

Bereich II

$$\begin{aligned} EIw_{II}^{(4)} &= 0 \\ EIw_{II}''' &= C_5 \\ EIw_{II}'' &= C_5x + C_6 \\ EIw_{II}' &= \frac{1}{2}C_5x^2 + C_6x + C_7 \\ EIw_{II} &= \frac{1}{6}C_5x^3 + \frac{1}{2}C_6x^2 + C_7x + C_8 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$w_I(x=0) = 0 \Rightarrow \underline{C_4 = 0}$$

$$w_I'(x=0) = 0 \Rightarrow \underline{C_3 = 0}$$

$$\begin{aligned} EIw_{II}'''(x=2l) &= -Q_z^{II}(x=2l) = 0 \\ &\Rightarrow \underline{C_5 = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EIw_{II}''(x=2l) &= -M_y^{II}(x=2l) = -\frac{1}{2}q_0l^2 \\ &\Rightarrow \underline{C_6 = -\frac{1}{2}q_0l^2} \end{aligned}$$

Übergangsbedingungen:

$$w_I(x=l) = 0 \quad (1)$$

$$-M_y^I(x=l) = -M_y^{II}(x=l) = EIw_I''(x=l) = EIw_{II}''(x=l) \quad (2)$$

$$w_I'(x=l) = w_{II}'(x=l) \quad (3)$$

$$w_I(x=l) = w_{II}(x=l) \quad (4)$$

$$\text{mit (1): } \frac{1}{24}q_0l^4 + \frac{1}{6}C_1l^3 + \frac{1}{2}C_2l^2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}C_1l - \frac{1}{12}q_0l^2$$

$$\Rightarrow EIw_I''(x=l) = \frac{1}{2}q_0l^2 + \frac{2}{3}C_1l - \frac{1}{12}q_0l^2$$

$$\text{mit (2): } \frac{2}{3}C_1l + \frac{5}{12}q_0l^2 = -\frac{1}{2}q_0l^2$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{11}{8}q_0l \quad \Rightarrow C_2 = \frac{3}{8}q_0l^2$$

$$\text{mit (3): } \frac{1}{6}q_0l^3 - \frac{11}{16}q_0l^3 + \frac{3}{8}q_0l^3 = -\frac{1}{2}q_0l^3 + C_7$$

$$\Rightarrow C_7 = \frac{17}{48}q_0l^3$$

$$\text{mit (4): } \frac{1}{24}q_0l^4 - \frac{11}{48}q_0l^4 + \frac{3}{16}q_0l^4 = -\frac{1}{4}q_0l^4 + \frac{17}{48}q_0l^4 + C_8$$

$$\Rightarrow C_8 = -\frac{5}{48}q_0l^4$$

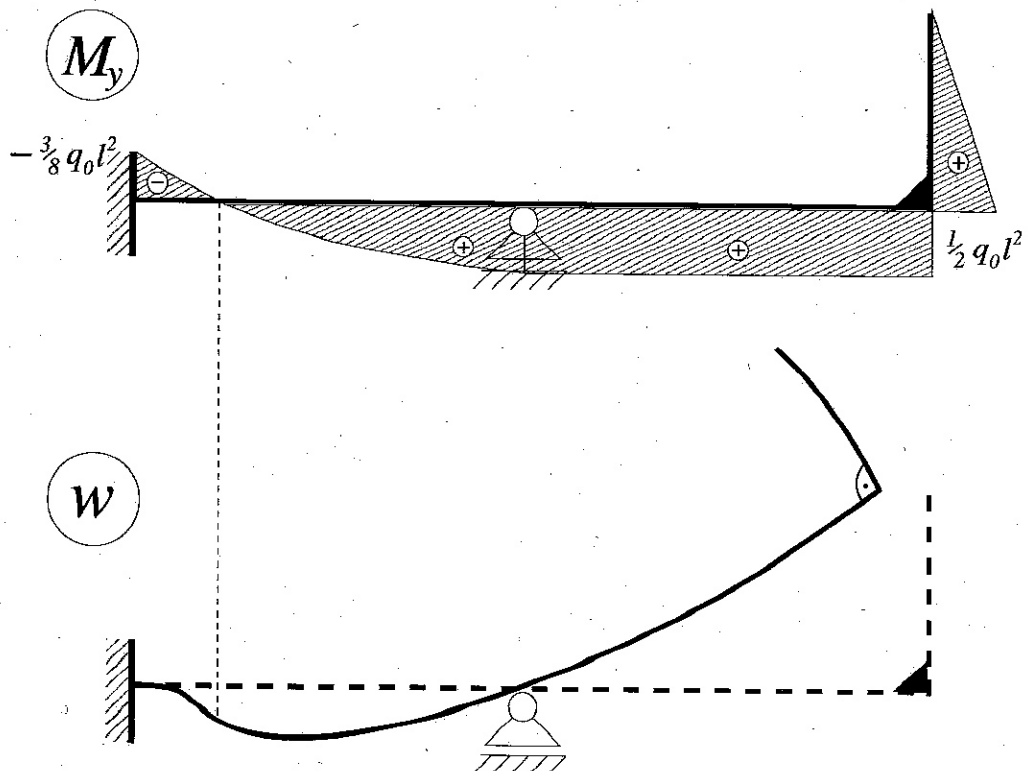
Bereich I

$$\underline{\underline{w_I(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}q_0x^4 - \frac{11}{48}q_0lx^3 + \frac{3}{16}q_0l^2x^2 \right)}}$$

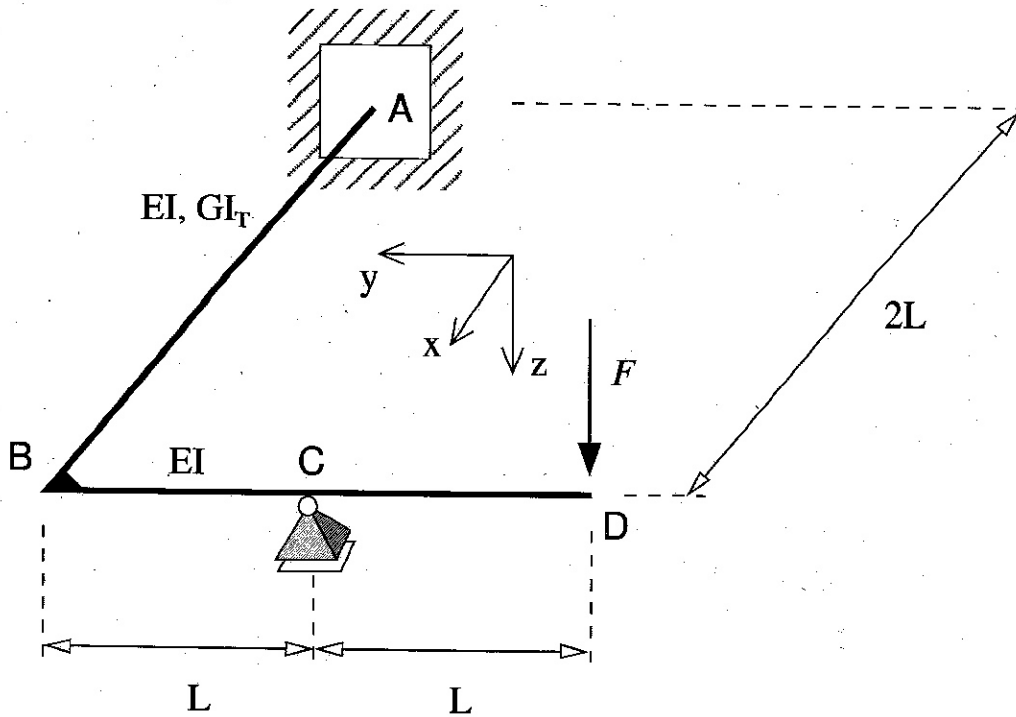
Bereich II

$$\underline{\underline{w_{II}(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{4}q_0l^2x^2 + \frac{17}{48}q_0l^3x - \frac{5}{48}q_0l^4 \right)}}$$

b) Momenten- und Biegelinie für A – B – C – D



4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte räumliche Tragwerk wird im Punkt D durch eine Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Auflagerkraft C im Punkt C sowie die Verschiebung f des Punktes B in z -Richtung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Gegeben: $L, EI, GI_T = 2EI, F$

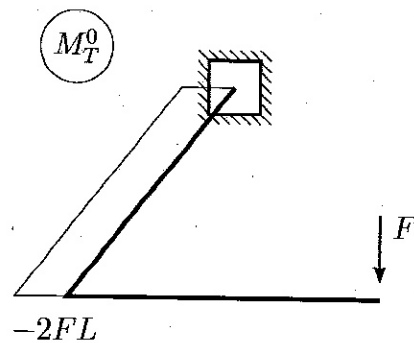
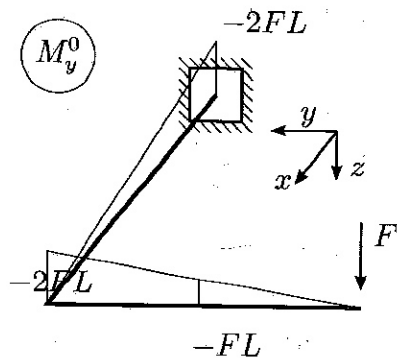
Hinweis: Die Aufgabe ist mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* zu lösen. Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

4. Aufgabe Lösung:

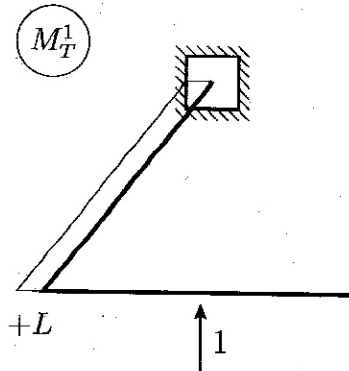
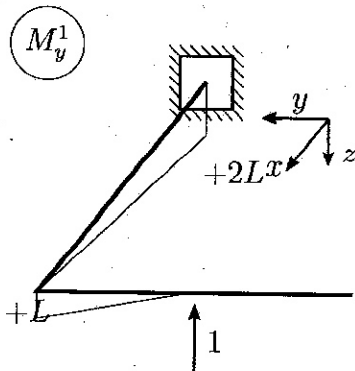
System 1-fach statisch unbestimmt ($a = 7, n = 1 : 6n \neq a$)

$\Rightarrow$ Wahl: $C_v = X_1$

0-System



1-System



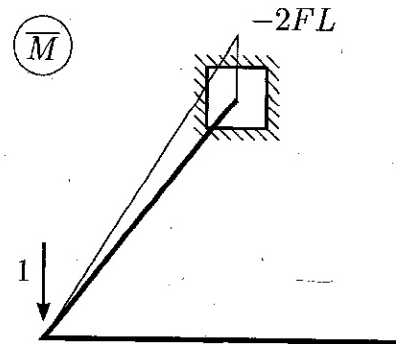
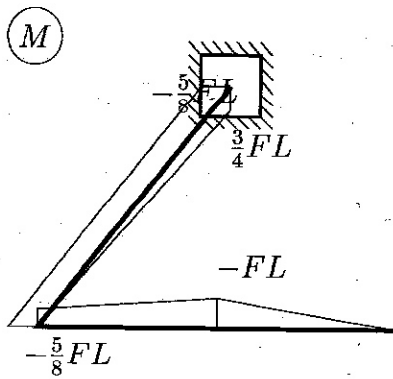
Einflusszahlen:

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{L}{6} (FL + 4FL) L + \frac{1}{3} (2FL (-2L) 2L) \right] + \frac{1}{GI_T} L (-2FL) 2L \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{5}{6} FL^3 - \frac{8}{3} FL^3 - 2FL^3 \right] = -\frac{11}{2} \frac{FL^3}{EI} \\ \alpha_{11} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (-L)^2 L + \frac{1}{3} (-2L)^2 (2L) \right] + \frac{1}{GI_T} L^2 \cdot 2L \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} L^3 + \frac{8}{3} L^3 + L^3 \right] = 4 \frac{L^3}{EI}\end{aligned}$$

$$C_v = X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{11}{8} F$$

Superposition:

$$M = M_0 + X_1 M_1$$



Reduktionssatz:

$$\begin{aligned} f &= \int \frac{\bar{M} M}{EI} dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (-2L) \left(\frac{3}{4} FL \right) \cdot 2L \right] \\ \Rightarrow f &= -\frac{1}{EI} FL^3 \end{aligned}$$

Anhang: Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x) dx$

$\begin{matrix} K(x) \\ P(x) \end{matrix}$						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1 + k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1 + 2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1 + a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1 + k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1 + b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1 + p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1 + 2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1 + p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1 + k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1 + 2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1 + b) + p_2(1 + a)]]s$	$\frac{k}{3}(p_1 + p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1 + k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3 - 4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1 + c)s$	$\frac{pk}{6}(1 + d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1 + d) + k_2(1 + c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c - c^2 - a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1 + cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1 + k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1 + ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1 + 3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5 - a - a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1 + 5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5 - b - b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1 + k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1 + b + b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1 + 3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1 + a + a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \triangleq$ Scheitel einer quadratischen Parabel